Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

7. März 2007

Klausur zur Vorlesung

Wärme- und Stoffübertragung

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechengang muss erkennbar sein! Interpolationsvorschriften sind anzugeben. Quadratische Gleichungen sind analytisch zu lösen.
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
Nicht in den Aufgabenstellungen angegebene Stoffdaten sowie die Nußelt-Beziehungen sind dem Anhang des Skriptums zur Vorlesung zu entnehmen.

Aufgabe 1: *Stoffdiffusion* 11 von 50 Punkten

In der Produktionsstraße einer Keramikfabrik wird eine sehr dicke Tonplatte bearbeitet. Zu Beginn hat sie einen homogenen Wasseranteil von $c_0 = 0,02\ g/cm^3$. Plötzlich wird diese Tonplatte vollständig in einen Behälter voll mit Wasser getaucht, d. h. die Konzentration an der Tonplattenoberfläche steigt sprunghaft auf den dann zeitlichen konstanten Wert $c_w = 1 g/cm^3$. Der Diffusionskoeffizient $D = 2 \cdot 10^{-6} m^2/s$ für Wasser im Ton sei dabei als konstant anzunehmen. Die Koordinate z steht senkrecht auf der Plattenoberfläche und zeigt positiv nach innen.

Hinweis: Die sehr dicke Tonplatte kann für diese Aufgabe als halbunendlicher Körper betrachtet werden.

x	0	0,066	0,23	0,32	0,65	∞
erf(x)	0	0,072	0,25	0,349	0,64	1

Tabelle Fehlerintegral

a) Skizzieren Sie qualitativ die Konzentrationsverläufe des Wasseranteils für 3 unterschiedliche Zeitpunkte nach dem Eintauchen.

b) Geben Sie die Differenzialgleichung sowie Anfangs- und Randbedingungen mit einer Erklärung an.

c) Geben Sie die Beziehung zwischen der Wasserkonzentration im Ton, dem Ort und der Zeit an.

d) Wie lange dauert es, bis die Konzentration c an der Stelle z = 0,5 cm den Wert $c(z = 0,5\ cm;\ t =\ ?) = 4 \cdot c_0$ erreicht hat?

e) Berechnen Sie die Wasserkonzentration nach t=30 Sekunden an der Stelle z =1cm.

Aufgabe 2: *Kühlen von Äpfeln* 11 von 50 Punkten

Ein Apfel mit einem Durchmeser $2r_0 = 10cm$ soll an einem heißen Tag mit $\vartheta_0 = 30°\text{C}$ Umgebungstemperatur in einem Kühlschrank, der auf $\vartheta_\infty = 5°\text{C}$ gehalten wird, gekühlt werden. Betrachten sie den Apfel näherungsweise als Kugel und verwenden sie für ihn die Stoffwerte von Wasser. Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient zwischen Kühlschrankinnenraum und Apfel liege bei $\alpha = 6W/m^2K$.

a) Benennen Sie die Art der Wärmeübertragung zwischen Apfel und Kühlschrankinnenraum.

b) Uns interessiert die Temperaturverteilung im Inneren des Apfels. Formulieren Sie die Anfangs- und Randbedingungen für dieses Problem. Benutzen Sie dabei die dimensionslose Übertemperatur $\Theta = \frac{\vartheta - \vartheta_\infty}{\vartheta_0 - \vartheta_\infty}$.

c) Wie groß ist die Temperatur in der Mitte des Apfels nach zwei Stunden? (Hinweis: Benutzen Sie das Diagramm in Abbildung 1, zeichnen Sie eventuell abzulesende Werte ein, und nehmen Sie die Stoffwerte bei $\vartheta = 20°\text{C}$.)

d) Wie lange muß man warten, damit der Apfel in der Mitte eine Temperatur von 10°C aufweist?

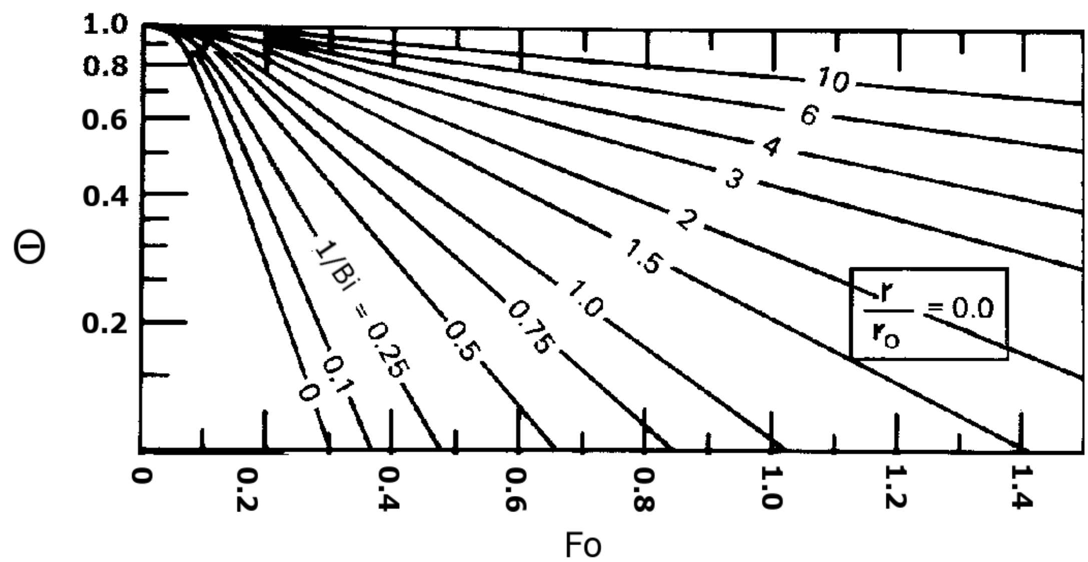


Abbildung 1: Instationäre Temperaturverteilung in der Mitte einer Kugel (r=0).

Aufgabe 3: *Glühwein* 14 von 50 Punkten

An einer Skihütte wird Glühwein in Pappbechern ausgeschenkt. Der Becher wird in ruhender Umgebung $\vartheta_{Umg} = 0°C$ auf einen Tisch gestellt. Der Glühwein hat zu Beginn ($t_0 = 0\,s$) eine Temperatur von $\vartheta_0 = 80°C$ und ist damit noch nicht trinkbar. Die Unterseite des Bechers ist gut isoliert.

Wie lange dauert es, bis der Glühwein eine trinkbare Temperatur von $\vartheta_1 = 60°C$ hat?

Gehen Sie bei der Berechnung folgendermaßen vor:

a) Berechnen Sie den äußeren Wärmeübergangskoeffizienten α_a der Mantelfläche!

b) Berechnen Sie den Wärmeübertragungsfähigkeit kA der Mantelfläche! Der Wärmeübergang auf der Innenseite sei ∞ groß. Rechnen Sie mit $\alpha_a = 9\,\frac{W}{m^2K}$.

Über die freie Oberfläche des Bechers erfolgt ein weiterer Wärmeaustausch mit einem Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_{oben} = 25\,\frac{W}{m^2K}$ (Stoffaustausch soll vernachlässigbar sein).

c1) Stellen Sie den ersten Hauptsatz für das *System* Becher + Glühwein auf. Vernachlässigen Sie hierbei die Wärmekapazität des Bechers.

c2) Berechnen Sie die Zeit bis zum Erreichen der Trinktemperatur von $\vartheta_1 = 60°C$. Rechnen Sie der Wärmeübertragungsfähigkeit der Mantelfläche $kA = 0,15\,\frac{W}{K}$.

Nach einem Temperaturabfall um weitere $20K$ auf eine Temperatur von $\vartheta_2 = 40°C$ schmeckt der Glühwein nicht mehr so gut.

d) Hat man zum Trinken mehr Zeit, die gleiche Zeit oder weniger Zeit zur Verfügung als die Wartezeit zur Abkühlung des Glühweins? Kurze Begründung (ohne Berechnung!)

Stoffwerte und Randbedingungen

Stoffwerte sind bei $\vartheta_{mittel} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_0 + \vartheta_1}{2} + \vartheta_{Umg}\right)$ zu bestimmen.

	therm. Ausdehnungskoeffizient bei $\vartheta_{Umg} = 0°C$	$\beta = 3,674 \cdot 10^{-3}/K$
Glühwein:	Anfangstemperatur	$\vartheta_0 = 80°C$
	Trinktemperatur	$\vartheta_1 = 60°C$
	spez. Wärmekapazität bei $\vartheta_{mittel} = 70°C$	$c_{\text{Wein}} = 4190\,J/kgK$
	Masse	$m = 0,2\,kg$
Becher:	Höhe	$h = 9\,cm$
	Außendurchmesser	$D = 6\,cm$
	Wanddicke	$s = 1\,mm$
	Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_{\text{Pappe}} = 0,12\,W/K\,m$

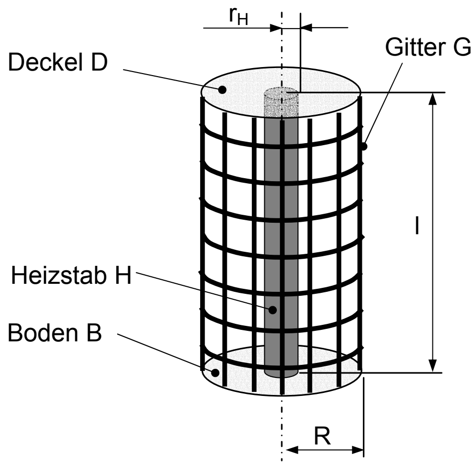
Auszug aus der Stoffdatentabelle für trockene Luft beim Druck von $p = 1\,bar$

ϑ $°C$	ϱ kg/m^3	c_p J/kgK	λ $10^{-3}W/K\,m$	ν $10^{-7}m^2/s$	Pr
30	1,149	1006,68	26,4104	162,88	0,7133
40	1,112	1007,09	27,1418	172,56	0,7122
50	1,078	1007,61	27,8656	182,46	0,7112

Aufgabe 4: *Heizstrahler* 14 von 50 Punkten

Zum Heizen öffentlicher Plätze werden zylindrische Heizstrahler wie unten abgebildet aufgestellt. Diese bestehen aus einem senkrechten Heizstab (H) mit der Länge l und dem Radius r_H, der zwischen einem adiabaten Deckel (D) und einem adiabaten Boden (B) mit dem Radius R montiert ist. Zwischen den Rändern des Deckels und des Bodens ist zum Schutz vor Verbrennungen ein Gitter (G) montiert, das aus zwölf senkrechten und neun waagerechten Stahlbändern (Breite jeweils b, Dicke vernachlässigbar) besteht. Die Stahlbänder sind gleichmäßig verteilt.

Nach einer kalten Nacht, zur Einschaltzeit der Heizung t_0, ist dieses Gitter gleichmäßig mit einer Eisschicht bedeckt. Ein Teil der erzeugten Strahlung wird an die Umgebung (U mit $T_U = 0°C$) abgegeben, der andere Teil trifft auf das vereiste Gitter ($T_G = T_{Eis} = 0°C$).



a) Bestimmen Sie die Sichtfaktoren F_{DB}, F_{HD}, F_{HB}, F_{DH} und F_{DM} (Mantel M = Gitter + Gitteraussparungen). **Siehe Hinweise nächste Seite!**

b) Wie hoch ist die Oberflächentemperatur des Heizstabes ϑ_H und des Deckels ϑ_D?

c) Welche Leistung $\dot{Q}_S$ wird an das Gitter zum Aufschmelzen des Eises abgegeben?

d) Welche Masse Eis wird pro Sekunde aufgeschmolzen?

e) Welche Strahlungsleistung $\dot{Q}_U$ wird an die Umgebung abgegeben?

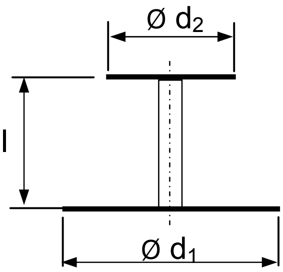
Zahlenwerte:

Radius des Deckels	$R_D = R$	$= 0{,}15$ m
Radius des Bodens	$R_B = R$	$= 0{,}15$ m
Radius des Mantels	$R_M = R$	$= 0{,}15$ m
Radius Heizstab	r_H	$= 0{,}005$ m
Länge Heizstab	l	$= 1$ m
Leistung der Stabheizung	$\dot{Q}_{el}$	$= 5$ kW
Breite Stahlbänder	b	$= 0{,}01$ m
Schmelzenthalpie Eis	h_s	$= 333\ \frac{kJ}{kg}$

Hinweise:

- Die Temperatur der Umgebung T_U und des Eises T_{Eis} sind 0°C
- Wärme wird ausschließlich durch Strahlung übertragen.
- Alle Flächen strahlen schwarz.
- Berechnungsvorschriften für Sichtfaktoren:

  Sichtfaktor für zwei parallele Kreisflächen:



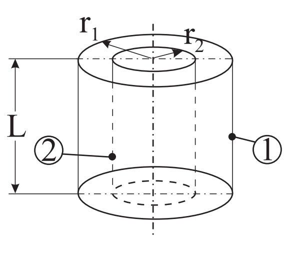
$$F_{12} = \frac{1}{2}\left[S - \sqrt{S^2 - 4(\frac{d_2}{d_1})^2}\right]$$

$$S = 1 + \frac{1 + (\frac{d_2}{2\cdot l})^2}{(\frac{d_1}{2\cdot l})^2}$$

In dieser Beziehung ist der Einfluss des Stabes vernachlässigbar.

Sichtfaktor für zwei konzentrische Zylinderflächen:

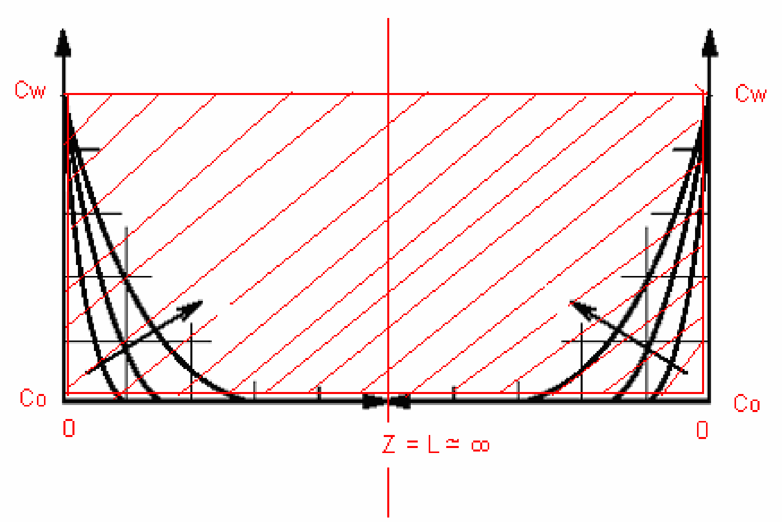
$$F_{12} = \frac{1}{X} - \frac{1}{\pi X}\Bigg(\frac{\pi}{180}\, arccos\frac{B}{A} - \frac{1}{2Y}\left[\sqrt{(A+2)^2 - 4X^2}\,\frac{\pi}{180}\, arccos\frac{B}{XA} + B\,\frac{\pi}{180}\, arcsin\frac{1}{X} - \frac{\pi A}{2}\right]\Bigg)$$



$$A = Y^2 + X^2 - 1; \qquad B = Y^2 - X^2 + 1$$

$$X = \frac{r_1}{r_2}; \qquad Y = \frac{L}{r_2}$$

a) Konzentrationsverlaufsdiagramm



b) DGL

$\xi_{(z,t)} = c_{(z,t)} - c_0$

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial \xi}{\partial t}$ 2. Ficksches Gesetz

Anfangsbedingung:

$t = 0 \Rightarrow \qquad c_{(z,0)} = c_0$

$\xi_{(z,0)} = c_{(z,0)} - c_0 = c_0 - c_0 = 0$

Randbedingungen:

$z = 0 \Rightarrow \qquad c_{(0,t)} = c_w$

$\xi_{(0,t)} = c_{(0,t)} - c_0 = c_w - c_0$

$z = \infty \Rightarrow \qquad c_{(\infty,t)}$ muss beschränkt sein

c) Beziehung Ort, Zeit und Wasserkonzentration:

$$\frac{c_{(z,t)} - c_0}{c_w - c_0} = 1 - erf\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right) = 1 - erf(x)$$

mit $x = \left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right)$

d) Zeit bis 4 c_0

$$\frac{3 \cdot 0,02}{0,98} = 1 - erf(x)$$

$erf(x) = 1 - 0,0612 = 0,939$

$x = 1,3 = \left(\frac{0,5}{\sqrt{4 \cdot 0,02 \cdot t}}\right)$

$t = 1,84\ s$

e) Nach 30 Sekunden

$t = 30\ s\ bei\ z = 1\ cm$

$c_{(1,30)}$

$x = \left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot 0,02 \cdot 30}}\right) = 0,65$

$erf(0,65) = 0,64$

$c_{(1\ cm,30\ s)} = (1 - 0,64)0,98 + 0,02$

$c_{(1\ cm,30\ s)} = 0,3728\ \frac{g}{cm^3}$

a) Wärmeübertragung durch freie Konvektion

b) **Randbedingung**:

$$
\begin{aligned}
r = r_0: \qquad & -\lambda \frac{\partial \vartheta(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} &= \alpha\ (\vartheta(r=r_0,t) - \vartheta_\infty) \\
\Longleftrightarrow \qquad & -\lambda \frac{\partial \Theta(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} &= \alpha\ \Theta(r=r_0,t)
\end{aligned}
$$

wobei $\Theta = \vartheta - \vartheta_\infty / \vartheta_0 - \vartheta_\infty$ und ϑ_∞ die konstante Temperatur der Luft im Kühlschrankinnenraum sowie ϑ_0 die Anfangstemperatur des Apfels ist).

Anfangsbedingung:

$$\vartheta(r, t=0) = \vartheta_0$$

c) Das wird gelöst mit Abb. 1. Dazu müssen zunächst die Fo-Zahl und die Bi-Zahl berechnet werden:

$$\mathrm{Fo} = \frac{at}{r_0^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Bi} = \frac{\alpha_{Fluid}\, r_0}{\lambda_{Apfel}}$$

mit

$$a = \frac{\lambda}{\varrho c_p}\bigg|_{20°C} = 1{,}434 \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}, \quad t = 7200\mathrm{s} \quad \text{und} \quad r_0 = 0{,}05\mathrm{m}$$

berechnet man:

$$Fo \approx 0{,}412 \quad \text{bzw.} \quad Bi^{-1} = \left(\frac{\alpha\, r_0}{\lambda}\right)^{-1} = \left(\frac{6\mathrm{W/m^2K} \cdot 0{,}05\mathrm{m}}{0{,}5984\mathrm{W/Km}}\right)^{-1} \approx 1{,}994$$

Aus dem Diagramm liest man damit ab:

$$\Theta \approx 0{,}73$$

und rechnet

$$\vartheta_{Mitte} = 0{,}73\,(\vartheta_0 - \vartheta_\infty) + \vartheta_\infty = 23{,}25°\mathrm{C}$$

d) Um die Zeit abzuschätzen, nach der der Apfel in der Mitte eine Temperatur von 10°C hat, geht man nun rückwärts vor:

$$\theta = \frac{10-5}{30-5} = 1/5 = 0{,}2,$$

nachwievor ist $Bi^{-1} = 1{,}994$ und damit liest man schließlich ab:

$$Fo = 1{,}29.$$

und rechnet

$$t = \frac{Fo\, r_0^2}{a} \approx 22300\mathrm{s} = 6\mathrm{h}\,12\mathrm{min}$$

.

Lösung Aufgabe 3: *Glühwein* 14 von 50 Punkten

a) **Kochrezept abarbeiten:**

1. Welche Strömungsform (erzwungen / frei)?

   Freie Konvektion am aufrechtstehenden Zylinder.

2. Nu-Beziehung heraussuchen anhand der Geometrie:

   Aufrechtstehender Zylinder (Höhe h und Durchmesser D)

   Charakteristische Länge ist gleich der Zylinderhöhe h

$$Nu = 0,97 \ \frac{h}{D} + \left\{ 0,825 + 0,387 \ \sqrt[6]{Ra \cdot f_1} \right\}^2$$

   mit f_1 entsprechend der vertikalen Platte.

$$f_1 = \left\{ 1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right\}^{-\frac{16}{9}}$$

3. Stoffwerte bei mittlerer Temperatur bestimmen:

   Die Anfangstemperatur des Glühweins beträgt $\vartheta_0 = 80°C$, die Trinktemperatur ist $\vartheta_1 = 60°C$. Die Umgebung hat eine konstante Temperatur von $\vartheta_{Umg} = 0°C$. Die mittlere Temperatur zur Ermittlung der Stoffwerte beträgt somit:

$$\vartheta_{mittel} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vartheta_0 + \vartheta_1}{2} + \vartheta_{Umg} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{80°C + 60°C}{2} + 0°C \right) = 35°C$$

   Die relevanten Stoffwerte ergeben sich durch Mittelwertbildung derjenigen für $30°C$ und $40°C$.

   - ϱ = 1,131 kg/m^3
   - c_p = 1006,885 J/kgK
   - λ = 26,776 $10^{-3} W/Km$
   - ν = 167,720 $10^{-7} m^2/s$
   - Pr = 0,7128

4. Dimensionslose Kennzahlen zusammensammeln:

   Grashof-Zahl:

$$\begin{aligned} Gr &= \frac{g \ l^3}{\nu^2} \ \beta \ |\vartheta_W - \vartheta_\infty| \\ &= \frac{9,81 \frac{m}{s^2} \ 0,09^3 m^3}{(167,720 \cdot 10^{-7} m^2/s)^2} 3,674 \cdot 10^{-3} K^{-1} \ \left| \frac{1}{2}(80°C + 60°C) - 0°C \right| \\ &= 6.538.287,603 \end{aligned}$$

Rayleigh-Zahl:

$$\begin{aligned} Ra &= Gr \cdot Pr \\ &= 6.538.287,603 \cdot 0,7128 \\ &= 4.660.491,403 \end{aligned}$$

Faktor f_1:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left\{1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right\}^{-\frac{16}{9}} \\ &= \left\{1 + \left(\frac{0,492}{0,7128}\right)^{\frac{9}{16}}\right\}^{-\frac{16}{9}} \\ &= 0,347654 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine Nußelt-Zahl von:

$$\begin{aligned} Nu &= 0,97\ \frac{h}{D} + \left\{0,825 + 0,387\ \sqrt[6]{Ra \cdot f_1}\right\}^2 \\ &= 0,97\ \frac{0,09m}{0,06m} + \left\{0,825 + 0,387\ \sqrt[6]{4.660.491,403 \cdot 0,347654}\right\}^2 \\ &= 26,6466 \end{aligned} \quad (1)$$

5. α bestimmen:

   Die Nußelt-Zahl ist definiert zu:

$$Nu = \frac{\alpha\ l}{\lambda}$$

   also:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\alpha_a}} &= \frac{Nu \cdot \lambda}{l} \\ &= \frac{26,6466 \cdot 26,776 \cdot 10^{-3} W/Km}{0,09m} \\ &= \underline{\underline{7,92 \frac{W}{m^2K}}} \end{aligned}$$

b) Die Wärmeübertragungsfähigkeit berechnet sich zu:

$$\left(\frac{1}{kA}\right)_{Zylinder} = \underbrace{\frac{1}{2\pi r_i L \alpha_i}}_{=0,\ da\ \alpha_i = \infty} + \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{2\pi r_a L \alpha_a}$$

wobei der erste Term wegen $\alpha_i = \infty$ gleich Null ist. Einsetzen der Zahlenwerte ergibt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{kA}\right)_{Zylinder} &= 0 + \frac{\ln\left(\frac{0{,}03m}{0{,}029m}\right)}{2\pi \cdot 0,12\,W/mK0,09m} + \frac{1}{2\pi \cdot 0,03m \cdot 0,09m \cdot 7,92\frac{W}{m^2K}} \\
&= 7,9423\,K/W \\
\Leftrightarrow \underline{\underline{kA}} &= \underline{\underline{0,1259\,W/K}}
\end{aligned}$$

c1) Für das *System* Glühwein + Becher vereinfacht sich der erste Hauptsatz folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{kv}} \varrho\left(u + \underbrace{\frac{w^2}{2} + \Psi}_{=0}\right) dV &= \underbrace{\sum_k \left[\dot{m}\left(h + \frac{w^2}{2} + \Psi\right)\right]_k}_{=0} + \sum_j \dot{Q}_j + \underbrace{\dot{W}_t - p\frac{dV_{kv}}{dt}}_{=0} \\
\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{kv}} \varrho u dV &= \sum_j \dot{Q}_j \\
\frac{dU}{dt} &= -\dot{Q}_{\text{Mantel}} - \dot{Q}_{\text{oben}} \\
\frac{m \cdot c_{\text{Wein}} \cdot dT}{dt} &= -kA_{\text{Mantel}} \cdot (T - T_{Umg}) - \alpha_{oben} A_{\text{oben}} \cdot (T - T_{Umg}) \\
\frac{m \cdot c_{\text{Wein}} \cdot dT}{dt} &= -(kA_{\text{Mantel}} + \alpha_{oben} A_{\text{oben}}) \cdot (T - T_{Umg})
\end{aligned}$$

c2) Berechnung der Abkühlzeit durch Auflösung der Differentialgleichung über Trennung der Veränderlichen.

$$\frac{m \cdot c_{\text{Wein}} \cdot dT}{dt} = -(kA_{\text{Mantel}} + \alpha_{oben} A_{\text{oben}}) \cdot (T - T_{Umg}) \quad \Big| \quad TdV$$

$$\frac{dT}{(T - T_{Umg})} = -\frac{kA_{\text{Mantel}} + \alpha_{oben} A_{\text{oben}}}{m \cdot c_{\text{Wein}}} \cdot dt \quad \Big| \quad \int$$

$$\int\limits_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{(T - T_{Umg})} = -\frac{kA_{\text{Mantel}} + \alpha_{oben} A_{\text{oben}}}{m \cdot c_{\text{Wein}}} \cdot \int\limits_{t_0}^{t_1} dt$$

$$\ln\left(\frac{T_1 - T_{Umg}}{T_0 - T_{Umg}}\right) = -\frac{kA_{\text{Mantel}} + \alpha_{oben} A_{\text{oben}}}{m \cdot c_{\text{Wein}}} \cdot (t_1 - t_0)$$

$$t_1 = \ln\left(\frac{T_0 - T_{Umg}}{T_1 - T_{Umg}}\right) \cdot \frac{m \cdot c_{\text{Wein}}}{kA_{\text{Mantel}} + \alpha_{oben} A_{\text{oben}}}$$

$$t_1 \approx 1116\,s = 18\,\mathrm{Min}\,36\,s \text{ wenn mit } D = 58mm \text{ gerechnet.}$$
$$t_1 \approx 1092\,s = 18\,\mathrm{Min}\,12\,s \text{ wenn mit } D = 60mm \text{ gerechnet.}$$

Es zeigt sich hier, dass die berechnete Zeit deutlich von der realistischen Zeit abweicht. Der in dieser Aufgabe vernachlässigte Stoffaustausch über die freie Oberfläche nach oben ist in Realität eben nicht zu vernachlässigen.

d) Bei der Abkühlung von $\vartheta_1 = 60°C$ bis $\vartheta_2 = 40°C$ liegt über den gesamten Zeitbereich eine niedrigere treibende Temperaturdifferenz gegenüber der Umgebung mit $\vartheta_{Umg} = 0°C$ vor, wodurch diese Abkühlung einen längeren Zeitraum in Anspruch nehmen würde.

a) F_{DB}:
$d_1 = d_2 = 2R = 0.3\ m; l = 1\ m$

$$S = 1 + \frac{1 + \left(\frac{2R}{2 \cdot l}\right)^2}{\left(\frac{2R}{2 \cdot l}\right)^2} = 46,44$$

$$\underline{F_{DB}} = \frac{1}{2}\left[46,44 - \sqrt{46,44^2 - 4\left(\frac{2R}{2R}\right)^2}\right] = \underline{0,02154}$$

Fläche Umgebung + Fläche Gitter = Fläche Mantel (M)

$$F_{MH} = \frac{1}{X} - \frac{1}{\pi X}\left(arccos\frac{B}{A} - \frac{1}{2Y}\left[\sqrt{(A+2)^2 - 4X^2}\ arccos\frac{B}{XA} + B\ arcsin\frac{1}{X} - \frac{\pi A}{2}\right]\right)$$

mit: $X = R/r_H = 30$
$Y = l/r_H = 200$
$A = Y^2 + X^2 - 1 = 40899$
$B = Y^2 - X^2 + 1 = 39101$

$F_{MH} = 0,03026$

$F_{HM} = \frac{A_M}{A_H} F_{MH}$

mit: $A_M = 2\pi R l = 0,9425 m^2$
$A_H = 2\pi r_H l = 0,0314 m^2$

$F_{HM} = 0,90768$

$F_{HM} + F_{HH} + F_{HD} + F_{HB} = 1$

mit: $F_{HB} = F_{HD}$
$F_{HH} = 0$

$\Rightarrow \underline{F_{HD}} = 0,5 \cdot (1 - F_{HM}) = \underline{0,04616}$

$\underline{F_{HB} = 0,04616}$

$F_{DH} = \frac{A_H}{A_D} F_{HD}$

mit: $A_D = 2\pi(R^2 - r_H^2) = 0,1412 m^2$

$\underline{F_{DH} = 0,01027}$

$F_{DD} + F_{DH} + F_{DM} = 1$
$\underline{F_{DM} = 0,96819}$

b) Bilanz des Heizstabes

Berechnung für den mit dem Halbraum ausgetauschten Strahlungswärmestrom:

$\dot{Q}_{el} = A_H[2 \cdot F_{HD}(H_H - H_D) + F_{HM}(H_H - H_M)]$

Bilanz des Deckels

$0 = A_D[F_{DB}(H_D - H_B) + F_{DM}(H_D - H_M) + F_{DH}(H_D - H_H)]$

$$\Rightarrow \frac{-\dot{Q}_{el} + A_H H_H - A_H F_{HM} H_M}{2 \cdot A_H F_{HD}} = H_D = \frac{F_{DM} H_M + F_{DH} H_H}{1 - F_{DB}}$$

mit: $H_M = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} (273,15K)^4 = 315,637 \frac{W}{m^2}$

$$H_H = \frac{\left(\frac{\dot{Q}_{el}}{A_H} + F_{HM} H_M\right)(1 - F_{DB}) + 2 \cdot F_{DM} F_{HD} H_M}{1 - F_{DB} - 2 \cdot F_{HD} F_{DH}} = 159624,95 \frac{W}{m^2}$$

$$T_H = \sqrt[4]{\frac{H_H}{\varepsilon\ \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{159624,95 \frac{W}{m^2}}{1 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}}} = 1295,33K$$

$\underline{\vartheta_H = 1022,2°C}$

$\Rightarrow H_D = 1987,68 \frac{W}{m^2}$

$T_D = 432,7K$

$\underline{\vartheta_D = 159,6°C}$

c) Bilanz des Gitters

$-\dot{Q}_s = -\dot{m}\ h_s = A_G[F_{GH}(H_G - H_H) + 2 \cdot F_{GD}(H_G - H_D) + F_{GG}(H_G - H_G) + F_{GU}(H_G - H_U)]$

mit $T_U = T_G = T_{Eis} \Rightarrow H_G = H_U$

$-\dot{Q}_s = A_G[F_{GH}(H_G - H_H) + 2 \cdot F_{GD}(H_G - H_D)]$

mit: $F_{GD} = \frac{A_D A_G}{A_M A_M} F_{DM}$

$F_{GH} = \frac{A_H A_G}{A_M A_M} F_{HM}$

$A_G = b\ [9\ (2\ \pi\ R - 12\ b) + 12\ l] = 0,19402 m^2$

$$-\dot{Q}_s = A_G H_G \left(\frac{A_H A_G}{A_M A_M} F_{HM} + 2 \frac{A_D A_G}{A_M A_M} F_{DM} \right) - A_H \frac{A_G}{A_M} F_{HM} H_H - 2 A_D \frac{A_G}{A_M} F_{DM} H_D$$

$\underline{\dot{Q}_s = 1044,9\ W}$

d) $\dot{m} = \frac{\dot{Q}_s}{h_s} = \underline{3,14\ g/s}$

e) $\dot{Q}_{el} = \dot{Q}_s + \dot{Q}_U$

$\underline{\dot{Q}_U = 3955,1\ W}$