Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

25. Juli 2008

Klausur zur Vorlesung

Wärme- und Stoffübertragung

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- und Gedankengang muss erkennbar sein! Interpolationsvorschriften sind anzugeben. Quadratische Gleichungen sind analytisch zu lösen. Hilfsmittel sind zugelassen, Verwenden Sie, sofern benötigt, die Gröberdiagramme aus dem Skript. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Instationäre Erwärmung* 15 von 50 Punkten

Kurzfrage: Unter welcher Bedingung geht die Randbedingung der dritten Art in eine Randbedingung der ersten Art über?

Eine Stahlplatte mit großer Abmessung in x- und y-Richtung im Verhältnis zu ihrer Dicke $d = 20\,cm$, die zum Zeitpunkt t_0 überall die einheitliche Temperatur von $20°C$ aufweist, wird an einem Wintertag aus der Werkshalle in die Umgebung mit einer Temperatur von -10°C gebracht.

Folgende Werte sind bekannt:

α_{Platte}	λ_{Stahl}	$c_{p,Stahl}$	ρ_{Stahl}	λ_{Luft}	ρ_{Luft}
$40\,\frac{W}{m^2K}$	$20\,\frac{W}{K\,m}$	$0{,}47\,\frac{J}{g\,K}$	$7900\,\frac{kg}{m^3}$	$0{,}026\,\frac{W}{K\,m}$	$1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$

a) Wie lange dauert es, bis sich ein Punkt, der $1\,cm$ unter der Oberfläche liegt, auf eine Temperatur von $0°C$ abgekühlt hat?

b) Welchen Wert für die benötigte Zeit (Temperatur bei $1\,cm = 0°C$) errechnet man unter der vereinfachenden Annahme, dass die Temperatur in der Stahlplatte nur eine Funktion der Zeit und nicht des Ortes sei, so dass also zu einem gegebenen Zeitpunkt überall in der Platte die gleiche Temperatur herrsche? Es gelte weiterhin $\alpha_{Platte} = 40\,\frac{W}{m^2K}$.

c) Welche Werte ergeben sich für λ und folglich für die Biot-Zahl im Fall der unter b) getroffenen Annahmen?

d) Zeichnen Sie jeweils einen qualitativen Temperaturverlauf in der Stahlplatte zu den Zeitpunkten $t_1 = t_0$ und $t_2 = t_0 + \Delta t$ für eine große und eine kleine Biot-Zahl! (Also insgesamt 4 Temperaturverläufe)

e) Herrscht an dem Tag, an dem die Stahlplatte aus der Werkshalle gebracht wird, Wind? Begründen Sie Ihre Antwort knapp!

KF: $\alpha \rightarrow \infty$

a)
$L = 10cm, \lambda = 20\frac{W}{K\,m}, \alpha = 40\frac{W}{m^2K}$
$\Rightarrow \frac{1}{Bi} = 5$
Aus Abb 4.12 ergibt sich mit mit $x/L = 0,9$, dass $\frac{T-T_\infty}{T_c-T_\infty} \approx 0,93$
Mit T=273,15K und $T_\infty = 263,15K$ ergibt sich daraus $T_c = 273,90K$
Abbildung 4.11 liefert mit diesen T_c und $\frac{1}{Bi} = 5$ $Fo \approx 5,9$
Mit $a_{Stahl} = 5,386 \cdot 10^{-6}$ ergibt sich daraus t=10954s = 182,6 min

b)
$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}$
Es wird eine Fläche von $1m^2$ betrachtet. (Funktioniert natürlich mit jeder Fläche). Das betrachtete Volumen V_{Platte} beträgt also $1m^2 * 0,1m$. Es wird nur die halbe Plattendicke berücksichtigt aufgrund von Symmetriegründen.
$\frac{\rho\ V_{Platte}\ c_{p,Stahl}\ dT}{dt} = (T - T_U)\alpha$
$\rho\ V_{Platte}\ c_{p,Stahl}\ ln(\frac{T_E-T_U}{T_A-T_U}) = -\alpha t$
t=10197s = 170 min

c)
$\lambda \rightarrow \infty$
$\Rightarrow Bi \rightarrow 0$

d)
Bei $t = t_0$ ist der Temperaturverlauf in der Platte unabhängig von der Biot Zahl waagerecht.
Bei $t = t_0 + \Delta t$ ist der Buckel bei großen Biotzahlen ausgeprägter. (siehe Vorlesungsfolien)
Bei kleinen Biotzahlen wird der Verlauf kastenförmig.

e)
Es herrscht Wind, da $\alpha = 40\frac{W}{m^2K}$ bei freier Konvektion und Luft als Fluid nicht erreicht wird.

Aufgabe 2: *Wärmeübertragerauslegung* 9 von 50 Punkten

Kurzfrage: Der unten abgebildete Wärmeübertrager ist eher geeignet, Wärme von einem flüssigen Medium auf Luft als von Luft auf Luft zu übertragen. An welcher geometrischen Eigenschaft des Wärmeübertragers lässt sich dies gut erkennen?

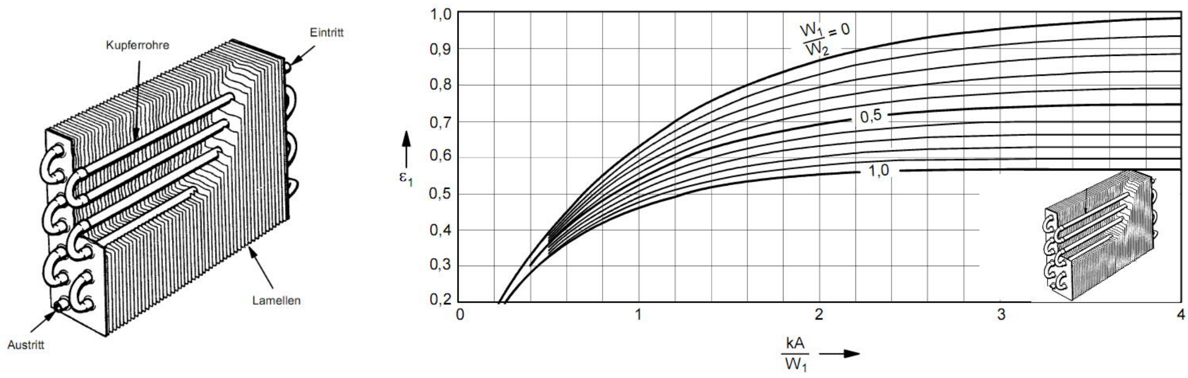

Abbildung 1: Lamellen-Rohrbündel-Wärmeübertrager mit Betriebscharakteristik

In einen Wärmeübertrager des oben abgebildeten Typs strömen trockene Luft bei Normaldruck mit einem Volumenstrom $\dot{V}_L = 1860\,\frac{m^3}{h}$ und Wasser mit $\dot{V}_W = 865\,\frac{l}{h}$ ein. Das Wasser tritt mit einer Temperatur von $T_W = 20{,}0°C$ ein. Die Luft mit einer Temperatur von $T_L = 90{,}0°C$. Der Hersteller des Wärmeübertragers gibt dessen kA-Wert mit $1000\,\frac{W}{K}$ an.

Verwenden Sie für die Wärmekapazitäten folgende Werte:

$c_{p,Wasser}$	$4{,}18\,\frac{J}{gK}$
$c_{p,Luft}$	$1{,}01\,\frac{J}{gK}$

a) Ermitteln Sie die beiden Wärmekapazitätsströme sowie die dimensionslose Übertragungsfähigkeiten N_{Wasser} und N_{Luft}!

b) Welche Austrittstemperaturen für das Wasser und die Luft werden sich gemäß der oben dargestellten Betriebscharakteristik einstellen?

c) Wäre das unter b) berechnete Ergebnis auch mit einem Gleichstromwärmeübertrager zu erzielen gewesen?

d) Bei einem Versuch im Labor ($T_{Labor} = 17°C$) werden jedoch folgende, etwas abweichende, Werte gemessen: $T'_L = 90{,}0°C$, $T''_L = 44{,}0$°C, $T'_W = 20{,}0$°C und $T''_W = 41{,}0$°C. Welcher Wärmestrom $\dot{Q}_{Luft}$ wird also von der Luft abgegeben? Welcher $\dot{Q}_{Wasser}$ vom Wasser aufgenommen? Deuten Sie Ihr Ergebnis kurz!

KF
Die zur Übertragung zur Verfügung stehenden Flächen sind sehr utnerschiedlich groß. Dieser Umstand trägt der Tatsache Rechnung, dass der Wärmeübergangskoeffizient von Flüssigkeiten auf Festkörper deutlich höher ist als der von Gasen auf Festkörper.

a)
$W = \dot{m}c_p$
$\rho_{Luft}(90°C) = 0,959\frac{kg}{m^3}$
$W_L = 1860\frac{m^3}{h} \cdot 0,959\frac{kg}{m^3} \cdot 1010\frac{J}{kg\,K} = 500\frac{W}{K}$
$W_W = 865\frac{l}{h} \cdot 998\frac{kg}{m^3} \cdot 4180\frac{J}{kg\,K} = 1002\frac{W}{K}$
$W_L = W_1$ und $W_W = W_2$, da W_2 stets größer als W_1 gewählt werden sollte, damit $\frac{W_1}{W_2}$ zwischen 0 und 1 liegt.
$N_{Wasser} = \frac{kA}{W_W} = 1$
$N_{Luft} = \frac{kA}{W_L} = 2$

b)
$\frac{W_1}{W_2} = 0,5$
Mit $N_1 = 2$ liefert die Betriebscharakteristik $\epsilon_1 = 0,7$.
Mit den bekannten Eintrittstemperaturen $T_1' = T_L' = 90°C$ und $T_2 = T_W' = 20°C$ liefert $\epsilon_1 = 0,7$ eine Austrittstemperatur des der Luft $T_1'' = 41°C$.
$\epsilon_2 = \epsilon_1\frac{W1}{W2} = 0,35$
$\Rightarrow T_2'' = T_W'' = 44,5°C$

c)
Nein, da bei Gleichströmer $T_1'' > T_2''$ sein muss. (Bei $T_1' > T_2'$)

d)
Luft gibt ab $\dot{Q}_L = (T_L' - T_L'') * W_L = 23,0kW$
Wasser nimmt auf $\dot{Q}_W = (T_W'' - T_W') * W_W = 21,0kW$
Also gehen 2kW verloren. Dieser Wärmestrom wird an die kalte Laborumgebung abgegeben.

Aufgabe 3: *Wärmeübertragung auf dem Weihnachtsmarkt* 18 von 50 Punkten

Kurzfrage: Warum muss bei der Berechnung des Stoffübergangs an der Oberfläche eines Glühweins auf dem Weihnachstmarkt $\beta_{einseitig}$ und nicht β verwendet werden?

In einem randvollen Styroporbecher befindet sich Glühwein mit der räumlich konstanten Temperatur $T_G = 65°C$. Der Styroporbecher ist zylinderförmig und besitzt keinen Griff. Der Becher steht seit einer Weile auf der Verkaufstheke eines Weihnachtsmarktstandes an einem windigen Wintertag bei konstanter Lufttemperatur von $T_L = -5°C$ und einer Windgeschwindigkeit von $w = 4\,\frac{m}{s}$. Die Verkaufstheke hat ebenfalls eine räumlich und zeitlich konstante Temperatur von $T_T = -5°C$.

Bekannte Eigenschaften des Styroporbechers:		Eigenschaften Luft:	
Wärmeleitfähigkeit Styropor	$0{,}04\,\frac{W}{m\,K}$	λ	$24{,}18 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{m\,K}$
Innendurchmesser	$60\,mm$	Pr	0,718
Höhe	$90\,mm$	ν	$135 \cdot 10^{-7}\,\frac{m^2}{s}$
Wandstärke (Wand und Boden)	$2\,mm$	β	$3{,}67 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$

Hinweise:

- Der Kontaktwiderstand zwischen der glatten Theke und dem Styroporbecher ist vernachlässigbar klein.
- Jegliche Wärmeübertragung durch Strahlung soll zunächst vernachlässigt werden.
- Berücksichtigen Sie nur Wärmeleitung senkrecht zu Wand bzw. Boden des Bechers!

a) Warum muss bei der Bestimmung des Wärmeübergangs an der Oberfläche des Glühweins die Ackermann-Korrektur berücksichtigt werden? Erläutern Sie Ihre Aussage mit einer Skizze der entsprechenden Grenzschichtprofile! (Hinweis: Im weiteren Verlauf der Aufgabe spielt die Oberseite des Glühweinbechers keine Rolle mehr.)

b) Welche Temperatur hat die Bodenunterseite des Styroporbechers?

c) Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_{außen}$ an der zylinderförmigen Außenseite des Bechers! Verwenden Sie dabei die oben gegebenen Stoffwerte!

Annahme 1: Gehen Sie ab hier davon aus, dass der Becher an seiner inneren Oberfläche die gleiche Temperatur hat wie der Glühwein.
Annahme 2: Gehen Sie ab hier weiterhin davon aus, dass $\alpha_{außen} = 50\,\frac{W}{m^2K}$ ist.

d) Welche Aussage können Sie gemäß der oben stehenden Annahme 1 über den Wärmeübergangswiderstand zwischen Glühwein und der Innenseite des Bechers machen?

e) Wie groß sind jeweils die thermischen Leitwiderstände von Boden und Zylinderwand des Bechers? Wie groß ist der Gesamtwiderstand dieser beiden Teilwiderstände? Welcher Gesamtwärmestrom wird von Glühwein an Boden und Becherwand abgegeben? Welche Temperatur stellt sich an der Zylinder-Außenseite des Bechers ein?

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Im Folgenden geht es um die bisher nicht berücksichtigte Wärmeübertragung durch Strahlung bei einer angenommenen Außentemperatur des Bechers von $10°C$:

f) Wie groß ist der Sichtfaktor des Mantels des zylinderförmigen Bechers auf die ebene Theke maximal? Wie groß ist er minimal? (Hierbei geht es um theoretische Grenzwerte und nicht um Ihre persönliche Erfahrung auf Weihnachtsmärkten.)

g) Wie groß ist der von der Becherwand auf die Theke übertragene Wärmestrom bei einem gegebenen Sichtfaktor von 0,3 von Zylindermantel auf Theke unter folgenden weiteren Bedingungen: Die Theke sei ein schwarzer Strahler, der Becher habe einen Emissionskoeffizienten $\epsilon = 0{,}85$. Dabei soll jegliche Wechselwirkung mit anderen strahlenden Körpern NICHT berücksichtigt werden.

h) Steigt oder sinkt die berechnete Außentemperatur des Bechers, wenn die Strahlung, die zunächst vernachlässigt wurde, berücksichtigt wird? (Nur qualitativ beantworten und begründen. Außentemperatur muss NICHT neu berechnet werden.)

KF:
Weil der Glühwein nach kurzer Zeit mit Luft gesättigt ist, findet nur noch ein Transport von Wein in Luft aber nicht mehr von Luft in Wein statt.

a)
Wg. gleichzeitigem Wärme- und Stoffübergang. Der Stoffstrom von der Oberfläche in die Luft weitet das Grenzschichtprofil auf und dadurch wird der Temperaturgradient in der Grenzschicht flacher. Das führt zu einer geringeren Wärmestromdichte.

b)
Da der Kontaktwiderstand zwischen Theke und Bodenunterseite gleich Null ist, muss die Bodenunterseite die gleiche Temperatur haben, wie die Theke: -5°C

c)
$Nu = Nu_r + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2}$ (Details: s. Anhang Skript erzw. Konvektion an umströmten Körpern)
$Re = 29787$ mit $l_{char} = \frac{\pi}{2} D_a = 0,1005m$ und $D_a = D_i + 2 \cdot 2\,mm = 64\,mm.$
$Nu_r = 0,3$
$Nu_{lam} = 102$
$Nu_{turb} = 121,3$
$\Rightarrow Nu = 158,9$
$\Rightarrow \alpha = 38,21\,\frac{W}{m^2K}$

d)
Wenn die Innenseite des Bechers die gleiche Temperatur wie der Glühwein selbst hat, muss der Übergangswiderstand gleich Null sein.

e)
$R_{Boden} = \frac{\delta}{A \cdot \lambda} = \frac{0{,}002m}{0{,}002827m^2 \cdot 0{,}04\,\frac{W}{m\,K}} = 17,69\,\frac{K}{W}$ mit $A = \pi \cdot r_i^2 = 0,002827m^2$
$R_{Zylinder} = \frac{ln\frac{r_a}{r_i}}{2\pi\lambda L} = 2,918\,\frac{K}{W}$
$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_{Boden}} + \frac{1}{R_{Zyl}} = 2,50\,\frac{K}{W}$
$\dot{Q}_{Boden} = \frac{\Delta T = 70K}{R_{Boden} = 17{,}69\,\frac{K}{W}} = 3,957\,W$
$\dot{Q}_{Zyl} = \frac{\Delta T}{R_{Zyl} + \frac{1}{\alpha \cdot A_{Zyl,a}}} = \frac{70K}{2{,}918\,\frac{K}{W} + \frac{1}{50\,\frac{W}{m^2K} \cdot 0{,}0177m^2}} = 17,29\,W$
$\dot{Q}_{ges} = 21,2W$

$(\vartheta_a - (-5°C)) \cdot 50\,\frac{W}{m^2K} \cdot 0,0177m^2 = \dot{Q}_{Zyl} = 17,29\,W$
$\Rightarrow \vartheta_a = 14,54°C$

f)
Bei einer unendlich großen Theke liegt der Sichtfaktor einer darauf senkrecht stehenden Fläche (Mantelfläche des Bechers) bei 0,5. Bei einer Theke, die nur gerade so groß ist wie der Boden des Bechers, ist der Sichtfaktor gleich Null.

g)
$\dot{Q}_{strahl} = \frac{\sigma(283,15^4 - 268,15^4)}{\frac{1-0,85}{A_M \cdot 0,85} + \frac{1}{A_M \cdot 0,3} + 0}$ mit der Mantelfläche $A_M = 0,0181m^2$
$\Rightarrow \dot{Q}_{strahl} = 0,36\,W$

h)
ϑ_a sinkt, da $R_{Außenseite-Umgebung}$ sinkt. Dadurch wird die Differenz zwischen ϑ_a und $\vartheta_{Umgebung}$ kleiner.

<u>Aufgabe 4:</u> *Fußbodenheizung* 8 von 50 Punkten

<u>Kurzfrage</u>: Stellen Sie sich zwei Körper im Vakuum vor. Der Körper Nr. 1 hat die hohe Temperatur T_h und Körper Nr. 2 die niedrige Temperatur T_n ($T_h > T_n$). Nun hat aber der Körper Nr. 1 einen deutlich niedrigeren Emissionskoeffizienten als Körper Nr. 2. Kann es deshalb zu einer Situation kommen, in der ein Nettowärmestrom von Körper 2, mit dem höheren Emissionskoeffizienten, zu Körper 1 fließt? KNAPPE Begründung!

In einem fensterlosen quaderförmigern Laborraum (Länge $= 6\,m$, Breite $= 4\,m$) ist eine Fußbodenheizung verlegt, die dafür sorgt, dass der nach unten adiabate Boden (Keine Wärmeabgabe ins Erdreich) eine höhere Temperatur als die Wände und die Decken hat. An einem Herbsttag haben Wände und Decken eine Temperatur von $18°C$. Die Raumluft hat eine Temperatur von $20°C$ und der Boden eine Temperatur von $26°C$.
Der Sichtfaktor vom Boden auf die Decke ist bekannt mit 0,5. Alle Oberflächen haben einen Emissionskoeffizienten von 1,0. Nur der Boden hat einen Emissionskoeffizienten von 0,8. Der beheizte Boden, dessen Temperatur räumlich und zeitlich konstant sein soll, gibt sowohl konvektiv ($\alpha_{Boden} = 15\,\frac{W}{K\,m^2}$) als auch über Strahlung Wärme ab.

a) Bestimmen Sie die Sichtfaktoren von der Decke auf den Boden, vom Boden auf die Wände (alle Wände sollen hierbei als eine Fläche gelten) und vom Boden auf sich selbst!

b) Bestimmen Sie die Reflektionskoeffizienten des Bodens und der restlichen Flächen!

c) Bestimmen Sie den Gesamtwärmestrom, der durch die Wände und die Decke des Raums nach außen fließt!

d) Ist der konvektiv abgegebene Wärmestrom linear proportional zu $\Delta T_{Boden-Luft}$? Wenn nicht: Wie lautet dann die Abhängigkeit und warum ist sie nicht linear?

KF:
Nein. Ein niedriger Emissionskoeffizient ist immer auch mit einem niedrigen Absorptionskoeffizienten verbunden. Der 'weniger strahlende' Körper absorbiert also auch weniger und reflektiert dafür mehr. Abgesehen davon verbietet der 2.HS das genannte Szenario.

Decke-Boden = 0,5 (wg. Boden - Decke = 0,5)
Boden-Boden = 0 (offensichtlich bei ebener Fläche)
Boden-Wände = 0,5 (Summenbeziehung)

$\varrho_{Boden} = 1 - \varepsilon_{Boden} = 0,2$
$\varrho_{uebrigeFlaechen} = 0$, da schwarze Strahler

Boden ist eine vom restlichen Raum komplett umschlossene Fläche:
$\dot{Q}_{Str} = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + 0} = 895,9\,W$
$\dot{Q}_{Konv} = \alpha_B \cdot \Delta T \cdot A = 15 \frac{W}{m^2 K} \cdot 6\,K \cdot 24 m^2 = 2160\,W$
$\dot{Q}_{total} = 3056\,W$

$\dot{Q}_{Konv} \sim \Delta T^{\frac{4}{3}}$, da $\alpha \sim \Delta T^{\frac{1}{3}}$.