

Klausur zur Vorlesung Wärme- und Stoffübertragung

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechengang muss erkennbar sein!
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Aufgabe 1: *Oberflächentemperatur einer beheizten Platte* 15 von 60 Punkten

Eine ebene, horizontal liegende Platte werde elektrisch mit $\dot{q} = 1\,000 \frac{W}{m^2}$ beheizt. Der Emissionskoeffizient der Plattenoberseite sei $\varepsilon = 0,8$. Die Plattenunterseite werde als adiabat angenommen.

Die den oberen Halbraum bildende Umgebung der Platte werde als schwarzer Strahler aufgefasst ($\varepsilon = 1$) und habe eine Temperatur von $T_u = 300\,K$.

- a) Welche Temperatur T_p besitzt die Platte im stationären Zustand, wenn Sie als Wärmetransportmechanismus nur die Strahlung berücksichtigen?
- b) Welche stationäre Plattentemperatur T_p stellt sich ein, wenn Sie zusätzlich noch Konvektion mit einem Wärmeübergangskoeffizienten „Platte – Umgebungsluft“ von $\alpha = 20 \frac{W}{m^2 K}$ zulassen ($T_u = T_{Luft}$)?

Lösen Sie die auftretende Gleichung 4. Grades iterativ unter Zuhilfenahme der Identität $x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$ sowie eines geeigneten anfänglichen Schätzwertes für T_p .

- c) Die Plattentemperatur betrage $T_{p,0} = 400\,K$. Zu der Zeit $t = 0$ werde die elektrische Heizung abgeschaltet. Wie lange dauert es, bis die Platte unter alleiniger Betrachtung des Wärmetransports infolge Strahlung (keine(!) Konvektion) eine Temperatur von $T_p = 310\,K$ erreicht hat? Die Dichte des Plattenmaterials betrage $\rho = 10^4\,kg/m^3$ bei einer Plattendicke von $\delta_p = 0,05\,m$ und einer spezifischen Wärmekapazität $c_p = 10^3 \frac{J}{kg K}$.

Hinweis:

$$\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a+x}{a-x} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} \quad \text{mit } a = \text{const.}$$

Aufgabe 2: *Heißwasserbereiter* 15 von 60 Punkten

Ein kugelförmiger Heißwasserbereiter mit dem Durchmesser von $D = 30\text{ cm}$ ist an einem vollständig isolierten zylindrischen Kupferstab der Länge $L = 10\text{ cm}$ und Dicke $d = 3\text{ cm}$ an der Decke in einem Raum aufgehängt und mit heißem Wasser der Temperatur $\vartheta_{H_2O} = 80^\circ\text{C}$ gefüllt.

Die Kugeloberfläche kann als grauer Strahler mit dem Emissionsgrad $\varepsilon = 0,5$ betrachtet werden und die umgebenden Wände bilden eine schwarze Umgebung mit einer Wandtemperatur von $\vartheta_W = 15^\circ\text{C}$. Die Lufttemperatur des Raumes beträgt $\vartheta_L = 20^\circ\text{C}$.

Ein über eine Heizspirale zugeführter Wärmestrom soll die Wärmeverluste, die über die Oberfläche entstehen, ausgleichen.

Es sollen folgende Annahmen getroffen werden:

- i) Der Kupferstab soll thermisch sowohl mit der Wand als auch mit der Kugel verbunden sein.
- ii) Zwischen der Luft und dem Stab soll aufgrund der idealen Isolierung kein Wärmeaustausch erfolgen.
- iii) Als Fläche für den Wärme- und Strahlungsaustausch zwischen Kugel und Umgebung soll die gesamte Kugeloberfläche $A_{Kugel} = 4\pi R^2$ angenommen werden.
- iv) Der Heißwasserbereiter werde als kleiner Körper angenähert, d.h. es herrsche eine konstante Temperatur im Wasser und an der ganzen Kugeloberfläche.

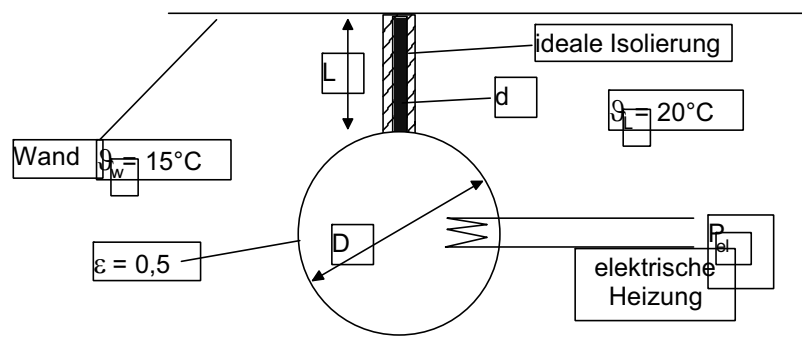


Abbildung 1: *kugelförmiger Heißwasserbereiter*

- a) Charakterisieren Sie die Wärmeströme, die bei diesem Problem eine Rolle spielen!
- b) Welche Wärmeleistung muss dem Heißwasserbereiter über die Heizspirale

zugeführt werden, damit die Wassertemperatur konstant bleibt?

- c) Welche Wärmeleistung ist erforderlich, wenn der Heißwasserbereiter mit einer Luftgeschwindigkeit von $w_L = 30 \frac{m}{s}$ angeströmt wird? Vernachlässigen Sie den Wärmeaustausch über Strahlung und Wärmeleitung.

Wichtige Stoffdaten von Kupfer und Luft:

$$\lambda_{Kupfer} = 399 \frac{W}{Km}, \quad \lambda_{Luft}(50^\circ C) = 0,0278 \frac{W}{Km}, \quad \nu_{Luft}(50^\circ C) = 17,935 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s},$$

$$Pr_{Luft}(50^\circ C) = 0,71$$

Aufgabe 3: Koaxialwärmeübertrager 15 von 60 Punkten

In einem im Gegenstrom geschalteten Koaxialwärmeübertrager nach Abbildung 2 soll überkritisches CO_2 mit einem Massenstrom von $\dot{m}_{CO_2} = 300 \frac{g}{s}$ und einer mittleren Wärmekapazität von $\bar{c}_{CO_2} = 2,48 \frac{kJ}{kgK}$ bei 100 bar Druck von $\vartheta_{CO_2}^{ein} = 90^\circ C$ auf $\vartheta_{CO_2}^{aus} = 40^\circ C$ abgekühlt werden. Dazu werde ein Kühlwasserstrom mit $\dot{m}_{H_2O} = 500 \frac{kg}{h}$ mit einer Wärmekapazität von $c_{H_2O} = 4,18 \frac{kJ}{kgK}$ verwendet, der bei einer Temperatur von $\vartheta_{H_2O} = 10^\circ C$ zur Verfügung steht.

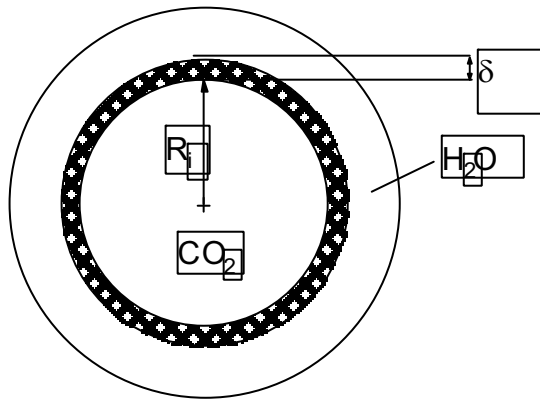


Abbildung 2: Koaxialwärmeübertrager

Der Wärmeübertrager ist nach Abbildung 2 aus zwei konzentrischen Rohren aufgebaut, so dass durch das innere Rohr mit $R_i = 10 \text{ mm}$ das CO_2 und im äußeren Rohrspalt das Kühlwasser strömt. Die Dicke der Trennwand beträgt $\delta = 2 \text{ mm}$ und ist aus Edelstahl mit einer Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 15 \frac{W}{mK}$ gefertigt.

Der Wärmeübergangskoeffizient zwischen der CO_2 -Strömung und der inneren Rohrwand und betrage $\alpha_{CO_2} = 3500 \frac{W}{m^2K}$ und zwischen der inneren Rohrwand und dem Kühlwasser $\alpha_{H_2O} = 5000 \frac{W}{m^2K}$. Von außen sei der Wärmeübertrager isoliert.

Hinweis:

Die Aufgabenteile a) bis c) sind mit Hilfe der Ersatzergebnisse unabhängig voneinander lösbar.

- a) Welche Wärmeleistung wird in dem Wärmeübertrager übertragen und mit welcher Temperatur tritt das Kühlwasser aus? (Ersatzergebnisse: $35 kW$, $70, 29^\circ C$)
- b) Wie groß muss der kA -Wert sein, damit diese Wärmeleistung übertragen werden kann und wie lang muss die Rohrlänge des Wärmeübertragers gewählt werden? (Ersatzergebnisse: $1, 5 \frac{kW}{K}$, $4 m$)
- c) Berechnen Sie mit Hilfe der dimensionslosen Kenngrößen die Austrittstemperaturen beider Fluide für einen Wärmeübertrager, der nur halb so lang ist wie in Aufgabe b)?

Aufgabe 4: *Trocknung eines Badetuches* 15 von 60 Punkten

Ein sehr feuchtes Badetuch wird an einer Wäscheleine zum Trocknen aufgehängt.

Es ist 2 m x 2 m groß und hängt senkrecht nach unten. Entlang des Tuches weht ein leichter Wind ($w = 0,5 \text{ m/s}$), der die Trocknung unterstützt.

Beim Verdunsten von Wasser aus dem Tuch kühlt sich das Tuch ab. Dadurch entsteht eine Temperaturdifferenz zur Umgebung, durch die dem Tuch konvektiv Wärme zugeführt wird. Nach einiger Zeit wird sich ein Beharrungszustand einstellen. Die Temperatur des Tuches beträgt dann $\vartheta_f < \vartheta_{umg}$.

Stoffwerte der Luft:

Prandtlzahl	$Pr_L = 0,72;$
kinematische Viskosität	$\nu_L = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s};$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_L = 0,025 \text{ W/Km};$
Temperaturleitfähigkeit	$a_L = 1,94 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s};$
Temperatur	$\vartheta_{L,\infty} = 5^\circ\text{C};$
Luftdruck	$p_{ges} = 1 \text{ bar}.$

Stoffwerte des Wassers:

Wasserdampfpartialdruck	$p_{W,\infty} = 0,0034 \text{ bar};$
Dampfdruck bei 0°C	$p_{W,0} = 0,0061 \text{ bar};$
Verdampfungsenthalpie bei 0°C	$\Delta h_{v,W} = 2500 \text{ J/g};$
Gaskonstante	$R_W = 0,462 \text{ J/gK};$
spez. isobare Wärmekapazität	$c_{p,W}^0 = 1,9 \text{ J/gK}.$

Diffusionskoeffizient Wasser/Luft $D = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$

- Wie groß sind der Wärmeübergangskoeffizient und der Stoffübergangskoeffizient
Tuchoberfläche / Luft? Das Wasser im feuchten Tuch ist mit Luft gesättigt.
Hinweis: Verwenden Sie nur die Nußelt-Beziehung für den laminaren Bereich.
- Im Beharrungszustand sei die Temperatur des Tuches auf $\vartheta_f = 0^\circ\text{C}$ gesunken, ohne dass das Wasser schon gefriert. Wie groß ist der verdunstende Wassermengenstrom?
Falls a) nicht gelöst wurde: Stoffübergangskoeffizient = $1,83 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}.$
- Das Tuch enthält zu Beginn des Trocknungsvorganges $m_W = 560 \text{ g}$ Wasser. Wie lange dauert die Trocknung, wenn die Restfeuchte noch

5 % betragen darf und der verdunstende Wassermengenstrom nach b) während der Trocknung konstant bleibt?

- d) Formulieren Sie eine Berechnungsvorschrift zur Ermittlung der Temperatur ϑ_f des Beharrungszustandes.

Lösungsblatt zur Vorlesung Wärme- und Stoffübertragung

Lösung zu Aufgabe 1: *Oberflächentemperatur einer beheizten Platte*

a) Es gilt:

$$q = \sigma \varepsilon (T_p^4 - T_u^4)$$

mit $q = K$ folgt:

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{q}{\sigma \varepsilon} + T_u^4}$$

Es folgt: $T = 416.7 \text{ K}$

b) Die Energiebilanz lautet nun:

$$q = \sigma \varepsilon (T_p^4 - T_u^4) + \alpha (T_p - T_u) = (T_p - T_u) [\sigma \varepsilon (T_p + T_u) (T_p^2 + T_u^2) + \alpha]$$

Auflösen nach T_p ergibt:

$$T_p = \frac{q}{\sigma \varepsilon (T_p' + T_u) (T_p'^2 + T_u^2) + \alpha} + T_u$$

mit einer geeigneten Schätztemperatur für T_p' . Folgende Tabelle zeigt die Konvergenz des Verfahrens für einen Anfangswert von $T_p' = 400 \text{ K}$:

Iterationsschritt	T_p'	T_p
1	400 K	335.79 K
2	335.79 K	338.69 K
3	338.69 K	338.56 K
4	338.56 K	338.57 K
6	338.57 K	338.57 K

Es stellt sich eine stationäre Plattentemperatur von $T_p = 338.57 \text{ K}$ ein.

c) Es gilt für die DGL:

$$m c_p \frac{dT_p}{dt} = \sigma \epsilon A (T_u^4 - T_p^4)$$

bzw.

$$\rho \delta_p c_p \frac{dT_p}{dt} = \sigma \epsilon (T_u^4 - T_p^4)$$

Es ergibt sich somit die DGL:

$$\frac{dT_p}{T_u^4 - T_p^4} = \frac{\sigma \epsilon}{\rho \delta_p c_p} dt$$

Integration ergibt:

$$\int_{T_{p,0}}^{T_p} \frac{dT_p}{T_u^4 - T_p^4} = \frac{1}{4T_u^3} \ln \left(\frac{T_u + T_p}{T_u - T_p} \cdot \frac{T_u - T_{p,0}}{T_u + T_{p,0}} \right) + \frac{1}{2T_u^3} \left(\arctan \frac{T_p}{T_u} - \arctan \frac{T_{p,0}}{T_u} \right) = \frac{\sigma \epsilon}{\rho \delta_p c_p} (t - t_0)$$

Einsetzen der angegebenen Werte

$$\frac{1}{2T_u^3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2.165 + (-0.1255) \right) = 9.072 \cdot 10^{-14} \frac{1}{s K^3} (t - t_0)$$

bzw.

$$1.772 \cdot 10^{-8} K^{-3} = 9.072 \cdot 10^{-14} \frac{1}{s K^3} (t - t_0)$$

Somit folgt:

$$t - t_0 = 195\,326 \text{ s} = 2.26 \text{ Tage}$$

Lösung zu Aufgabe 2: Heißwasserbereiter

a) Insgesamt sind es drei Verlustwärmeströme, die berücksichtigt werden müssen:

Wärmeleitung durch den Stab, freie Konvektion über die Luft und Wärmeaustausch durch Strahlung.

Außerdem werden die an die Umgebung abgegebenen Wärmeströme durch den über die elektrische Heizung zugeführten Heizwärmestrom kompensiert.

b) i) Wärmeleitung durch ebene Platte der Dicke δ und Fläche A :

$$\begin{aligned}\dot{Q}_L &= \frac{\lambda_{Kupfer} \cdot A}{\delta} (\vartheta_{H_2O} - \vartheta_W) \\ &= \frac{\lambda_{Kupfer} \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}{L} (\vartheta_{H_2O} - \vartheta_W) = \underline{183,32 W}\end{aligned}$$

ii) freie Konvektion um eine Kugel mit D als charakteristischer Durchmesser:

$$\begin{aligned}Gr &= \frac{g l^3}{\nu_{Luft}^2 T_L} \cdot |\vartheta_{H_2O} - \vartheta_L| = 1,68475 \cdot 10^8 \\ Ra &= Gr \cdot Pr = 1,19617 \cdot 10^8 \\ Nu &= 2 + 0,56 \sqrt[4]{Ra \left(\frac{Pr}{Pr + 0,846}\right)} = 50,1336 \\ \alpha &= \frac{Nu \cdot \lambda}{D} = 4,646 \frac{W}{m^2 K} \\ \dot{Q}_{Konvektion} &= \alpha 4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (\vartheta_{H_2O} - \vartheta_L) = \underline{78,82 W}\end{aligned}$$

iii) Strahlungsaustausch zwischen Kugel und Umgebung:

$$\dot{Q}_s = \sigma \varepsilon A (T_{H_2O}^4 - T_W^4) = \underline{69,48 W}$$

Insgesamt muss dem Heißwasserbereiter also eine Wärmeleistung von

$$\dot{Q}_{ges} = \dot{Q}_L + \dot{Q}_K + \dot{Q}_S = \underline{331,558 W}$$

zugeführt werden.

c) Wärmeaustausch durch erzwungene Konvektion an einer umströmten Kugel:

$$\begin{aligned}Re &= \frac{w \cdot D}{\nu_{Luft}} = 501,812 \\ Nu_{lam} &= 0,664 \sqrt{Re} \sqrt[3]{Pr} = 419,6219\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Nu_{turb} &= \frac{0,037Re^{0,8}Pr}{1 + 2,443Re^{-0,1}(Pr^{2/3} - 1)} = 1102,76 \\
Nu &= Nu_{ruhend} + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2} = 1181,9 \\
\alpha &= \frac{Nu \cdot \lambda_{Luft}}{D} = 109,52 \frac{W}{m^2K} \\
\dot{Q} &= \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_{H_2O} - \vartheta_L) = \underline{1858 W}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3: Koaxialwärmeübertrager

a)

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{m}_{CO_2} \cdot \bar{c}_p \cdot (\vartheta_{CO_2}^{ein} - \vartheta_{CO_2}^{aus}) = \underline{37,2 \text{ kW}} \\ \dot{Q} &= \dot{m}_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot (\vartheta_{H_2O}^{aus} - \vartheta_{H_2O}^{ein}) \\ \vartheta_{H_2O}^{aus} &= \vartheta_{H_2O}^{ein} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_{H_2O} \cdot c_{H_2O}} = \underline{74,08^\circ C}\end{aligned}$$

b) Nach dem 1. HS gilt für den Wärmeübertrager

$$\dot{Q} = kA \cdot \Delta T_m$$

Die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz für einen Gegenstromwärmeübertrager mit $C_1 = \frac{W_1}{W_2} \neq 1$ berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\Delta T_m &= \frac{(\vartheta_{CO_2}'' - \vartheta_{H_2O}') - (\vartheta_{CO_2}' - \vartheta_{H_2O}'')}{\ln\left(\frac{\vartheta_{CO_2}'' - \vartheta_{H_2O}'}{\vartheta_{CO_2}' - \vartheta_{H_2O}''}\right)} = 22,22 \text{ K} \\ \Rightarrow kA &= \frac{\dot{Q}}{\Delta T_m} = \underline{1672,64 \frac{W}{K}}\end{aligned}$$

Der kA – Wert des Koaxialwärmeübertragers nimmt für die Zylindergeometrie folgenden Ausdruck an:

$$\left(\frac{1}{kA}\right)_{Zylinder} = \frac{1}{2\pi R_i L \alpha_{CO_2}} + \frac{\ln\left(\frac{R_i + \delta}{R_i}\right)}{2\pi \lambda L} + \frac{1}{2\pi (R_i + \delta) L \alpha_{H_2O}}$$

Damit folgt für die Länge des Koaxialwärmeübertragers

$$L = kA \cdot \left(\frac{1}{2\pi R_i \alpha_{CO_2}} + \frac{\ln\left(\frac{R_i + \delta}{R_i}\right)}{2\pi \lambda} + \frac{1}{2\pi (R_i + \delta) \alpha_{H_2O}} \right) = \underline{15,29 \text{ m}}$$

c) Wahl der Indizes: 1 \rightarrow CO_2 (heißerer Strom) und 2 \rightarrow H_2O (kälterer Strom)

$$\varepsilon_{1,gegen} = \frac{1 - e^{-N_1(C_1-1)}}{1 - C_1 e^{-N_1(C_1-1)}}$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \dot{m}_{CO_2} \cdot \bar{c}_{CO_2} = 0,744 \frac{kJ}{K \cdot s}; & W_2 &= \dot{m}_{H_2O} \cdot c_{H_2O} = 0,581 \frac{kJ}{K \cdot s} \\
N_1 &= \frac{kA/2}{W_1} = 1,124; & C_1 &= \frac{W_1}{W_2} = 1,281 \\
\Rightarrow \varepsilon_1 &= 0,4908 = \frac{\vartheta'_{CO_2} - \vartheta''_{CO_2}}{\vartheta'_{CO_2} - \vartheta'_{H_2O}} \\
\Rightarrow \vartheta''_{CO_2} &= -\varepsilon_1 \cdot (\vartheta'_{CO_2} - \vartheta'_{H_2O}) + \vartheta'_{CO_2} = \underline{50,74^\circ C} \\
\varepsilon_2 &= C_1 \cdot \varepsilon_1 = 0,6287 = \frac{\vartheta''_{H_2O} - \vartheta'_{H_2O}}{\vartheta'_{CO_2} - \vartheta'_{H_2O}} \\
\Rightarrow \vartheta''_{H_2O} &= \varepsilon_2 \cdot (\vartheta'_{CO_2} - \vartheta'_{H_2O}) + \vartheta'_{H_2O} = \underline{60,30^\circ C}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4: *Trocknung eines Badetuches*

- a) Erzwungene Strömung an überströmter ebener Platte, charakteristische Länge = Plattenlänge $l = 2\text{ m}$, $Nu_{ruhend} = 0$

Allgemeiner Ansatz

$$Nu = Nu_{ruhend} + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2}$$

mit

$$Nu_{lam} = 0,664\sqrt{Re}\sqrt[3]{Pr}$$

Nu_{turb} bleibt unberücksichtigt.

Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{wl}{\nu} = \frac{0,5\text{ m/s} \cdot 2\text{ m}}{1,4 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}} = 71429$$

Nußelt-Zahl

$$Nu = 0,664\sqrt{71429}\sqrt[3]{0,72} = 159,1 = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

\Rightarrow Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha = \frac{159,1 \cdot 0,025\text{ W/Km}}{2\text{ m}} = 1,988\text{ W/Km}^2$$

Übersetzung:

$$\begin{aligned}
Pr &\rightarrow Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{1,4 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}}{2,5 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}} = 0,56 \\
Nu &\rightarrow Sh
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Sh_{lam} &= 0,664\sqrt{Re}\sqrt[3]{Sc} = 146,27 = \frac{\beta l}{D} \\ \Rightarrow \beta &= \frac{146,27 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} m^2/s}{2m} = 1,828 \cdot 10^{-3} m/s\end{aligned}$$

Wasser mit Luft gesättigt \Rightarrow Korrektur $\beta \rightarrow \beta_{einseitig}$

$$\begin{aligned}\beta_{einseitig} &= \beta \cdot \frac{p}{p_{W,0} - p_{W,\infty}} \cdot \ln\left(\frac{p - p_{W,\infty}}{p - p_{W,0}}\right) \\ &= 1,828 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{0,0061 - 0,0034} \cdot \ln\left(\frac{1 - 0,0034}{1 - 0,0061}\right) \\ &= 1,837 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{m}_W &= \beta_{einseitig} \cdot \frac{A}{R_W T} \cdot (p_{W,0} - p_{W,\infty}) \\ &= 1,837 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2m \cdot 2m}{0,462 \frac{J}{gK} 275,65K} \cdot (0,0061 - 0,0034) bar \cdot \frac{10^5 J/m^3}{bar} \\ &= 0,0156 \frac{g}{s} \\ \text{mit } T &= \frac{1}{2}(278,15 + 273,15)K\end{aligned}$$

c)

$$\Delta t = \frac{m_W - 0,05 \cdot m_W}{\dot{m}_W} = \frac{532g}{0,0156g/s} = 34102 s \approx 9,47 h$$

d) Energiebilanz

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{Verdunstung} &= \dot{m}_W \cdot [\Delta h_{V,W} + c_{p,W}^0 (\vartheta_{L,\infty} - \vartheta_f)] \\ &= \dot{Q}_{konvektiv} = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_{L,\infty} - \vartheta_f)\end{aligned}$$