

Klausur zur Vorlesung
Thermodynamik

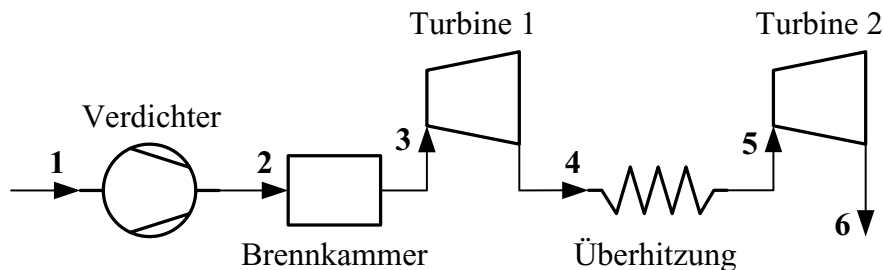
Für alle Aufgaben gilt: Der Rechengang muss erkennbar sein! Interpolationsvorschriften sind anzugeben. Quadratische Gleichungen sind analytisch zu lösen. Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.

Aufgabe 1: Joule-Prozess mit Zwischenüberhitzung

14 von 50 Punkten

Hinweis: Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar!

- a) Zeichnen Sie einen idealen ($\eta_{SV}, \eta_{ST} = 1$) und einen realen ($\eta_{SV}, \eta_{ST} < 1$) offenen Joule-Prozess in ein T,s-Diagramm ein.
- b) Skizzieren Sie den Prozessverlauf für die nachfolgend dargestellte reale Gasturbinenanlage mit Zwischenüberhitzung unter den für die Aufgabenteile b) und c) gültigen Randbedingungen $T_3 = T_5$ und $T_4 = T_6$ in einem T,s-Diagramm.



Die abgebildete Gasturbinenanlage arbeitet nach dem Prinzip des Joule-Prozesses mit Zwischenüberhitzung. Als Arbeitsgas wird Luft verwendet, die sich wie ein ideales Gas verhält ($c_{p, Luft} = 1,005 \frac{kJ}{kg \cdot K}$, $R_{Luft} = 287 \frac{J}{kg \cdot K}$).

Desweiteren sind Ihnen folgende technische Daten der Anlage bekannt:

Zustand	1	2	3	4	5	6
p [bar]	1	25	25	5	5	1
T [K]	288	800				

- c) Berechnen Sie den isentropen Verdichterwirkungsgrad η_{SV} und den Gasmassenstrom \dot{m}_G unter der Annahme, daß die Turbineneintrittstemperaturen 1400 K und die Turbinenaustrittstemperaturen 900 K betragen und eine Netto-Nutzleistung von $P = 120$ MW aus dem Prozess gewonnen wird.
- d) Berechnen Sie die tatsächlichen Temperaturen T_3 , T_4 und T_5 an den Turbinen und den isentropen Turbinenwirkungsgrad η_{ST} für den Fall, daß die reale Anlage einen thermischen Wirkungsgrad von $\eta_{th} = 32,7\%$ besitzt und die Turbinenaustrittstemperatur $T_6 = 937$ K beträgt.
Gehen Sie dabei davon aus, daß die beiden Turbinen den gleichen isentropen Turbinenwirkungsgrad besitzen und die Turbineneintrittstemperaturen T_3 und T_5 identisch sind!

Aufgabe 2: *Löschung eines Reaktors*

12 von 50 Punkten

Ein chemischer Reaktor ist mit einer Löschanlage für kritische Notfallsituationen ausgestattet. Dazu ist eine Stickstoffflasche neben dem Reaktor montiert. Im Notfall kann der Stickstoff über ein Ventil sehr schnell in den Reaktor eingeblasen werden. Es soll angenommen werden, dass sich Druck und Temperatur im Reaktor durch das Einblasen des Stickstoffes nicht ändern.

Stickstoffflasche: $p_1 = 130 \text{ bar}$, $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$, $V = 50 \text{ l}$

Reaktor: $p_0 = 30 \text{ bar}$

Stoffdaten: $M = 14 \text{ g/mol}$, $c_v = 1040 \text{ J/kgK}$, $R = 8,3143 \text{ J/molK}$

Es soll vereinfachend angenommen werden, dass die Entleerung sehr schnell (keine Zeit für Wärmeaustausch) abläuft.

- a) Welche Zustandsänderung ergibt sich innerhalb der Stickstoffflasche
Hinweis: Betrachten Sie nur den in der Stickstoffflasche verbleibenden Stickstoff, für den die Zustandsänderung reversibel verläuft.
- b) Welche Temperatur ϑ_2 stellt sich für den Reststickstoff in der Flasche unmittelbar nach dem Druckausgleich ein?
- c) Welche Masse Stickstoff m_2 verbleibt unmittelbar nach dem Druckausgleich in der Flasche?

In den folgenden Teilaufgaben soll, ausgehend vom 1. Hauptsatz der Thermodynamik, eine Beziehung für die Endtemperatur ϑ_2 hergeleitet werden. Es sind keine Zahlenwerte einzusetzen.

- d) Stellen Sie für die Stickstoffflasche den 1. Hauptsatz in geeigneter Form auf und formen Sie diesen so um, dass sich eine Beziehung für ϑ_2 ergibt.
- e) Vergleichen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil d) mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil b).

Aufgabe 3: *Luftexpansion*

13 von 50 Punkten

Luft soll von dem Zustand A, $p_A = 17 \text{ bar}$, $\vartheta_A = 45 \text{ }^\circ\text{C}$ einmalig in den Zustand E, $p_E = 2 \text{ bar}$, $\vartheta_E = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ durch zwei verschiedene Prozessführungen überführt werden. Die Zustandsänderungen werden in einer Umgebung mit $p_u = 1 \text{ bar}$, $\vartheta_u = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ durchgeführt.

Prozessführung I: Die gewinnbare Arbeit ist maximal.

- Welche Bedingung muss die Prozessführung I erfüllen, um die maximale Arbeit zu erzielen? Begründen Sie Ihre Antwort anhand eines physikalischen Postulats. Fassen Sie die Zustandsänderungen dieses Prozesses zusammen.
- Skizzieren Sie die Prozessführung I sowohl in einem p-v- als auch in einem T-s-Diagramm.
- Bestimmen Sie die einmalig gewinnbare maximale spezifische Arbeit für die Prozessführung I. (Hinweis: Vernachlässigen Sie Änderungen der kinetischen und potenziellen Energie. Benutzen Sie hierfür $c_p = 1,005 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, $R_{Luft} = 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$. Vernachlässigen Sie eine Temperaturänderung der Wärmekapazitäten).

Prozessführung II: Eine reibungsbehaftete adiabate Expansion vom Zustand A bis zum Druck $p_1 = 12,767 \text{ bar}$. Die Expansion verläuft mit einem isentropen Wirkungsgrad von $\eta = 0,75 = \frac{T_A - T_1}{T_A - T_{1rev}}$. Der Rest des Prozesses II soll entsprechend der Bedingung der Prozessführung I durchgeführt werden.

- Berechnen Sie die Temperatur T_1 . Benennen Sie die Zustandsänderungen der Prozessführung II und skizzieren Sie sie sowohl in einem p-v- als auch in einem T-s-Diagramm. Nutzen Sie hierfür die Diagramme des Aufgabenteils b).
- Berechnen Sie den spezifischen Arbeitsverlust durch Irreversibilität der Prozessführung II. Bestimmen Sie die einmalig maximale gewinnbare spezifische Arbeit und vergleichen Sie sie mit der in Teilaufgabe c) berechneten maximalen gewinnbaren Arbeit.

Fragen zu einem idealen Gas

- a) Welche zwei Moleküleigenschaften sind für ein ideales Gas gültig? Von welchen Zustandsgrößen ist die innere Energie und die Enthalpie des idealen Gases abhängig?
- b) Zeigen Sie, dass die Beziehung:

$$\beta = p \Gamma \chi$$

für ein ideales Gas gilt.

Hinweis:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad \chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \quad \Gamma = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

- c) Zeigen Sie mit Hilfe der Beziehung:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + V,$$

dass die Enthalpie eines idealen Gases nicht vom Druck abhängt.

Fragen zu einem realen Gas

- d) Berechnen Sie die Änderung der inneren Energie für eine Zustandsänderung von (T_0, v_0) nach (T, v) . Gehen Sie von der Relation.

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

aus und verwenden Sie zudem die Beziehung:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

Weiterhin sind gegeben:

$$C_V = n K R$$

und die thermische Zustandsgleichung des Gases:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

mit den Konstanten K , R , a und b .

- e) Leiten Sie die Beziehung:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + V$$

her. Gehen Sie dabei von der Gibbsschen Fundamentalgleichung in Enthalpieform aus und bestimmen Sie damit Identitäten für T und V . Benutzen Sie ferner eine geeignete Maxwell-Relation und die allgemeine mathematische Beziehung:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial Z_1} \right)_{Z_3} = \left(\frac{\partial Z}{\partial Z_1} \right)_{Z_2} + \left(\frac{\partial Z}{\partial Z_2} \right)_{Z_1} \left(\frac{\partial Z_2}{\partial Z_1} \right)_{Z_3}$$

a)

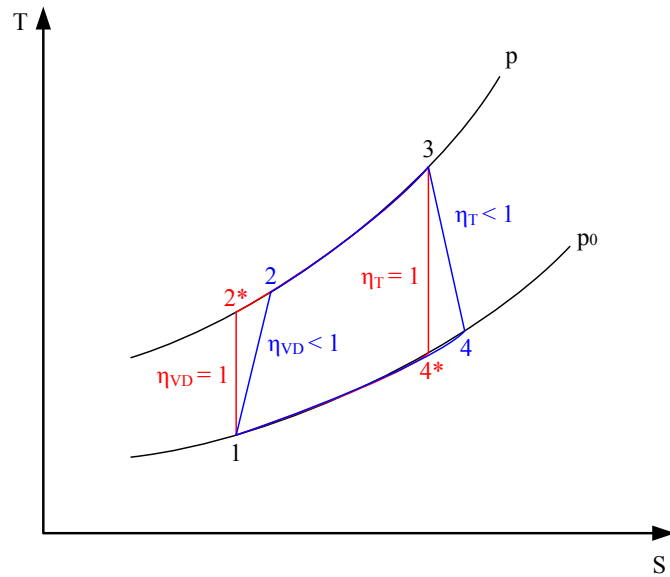


Abbildung 1: Idealer und realer Gasturbinen-Prozess im T,s-Diagramm

b)

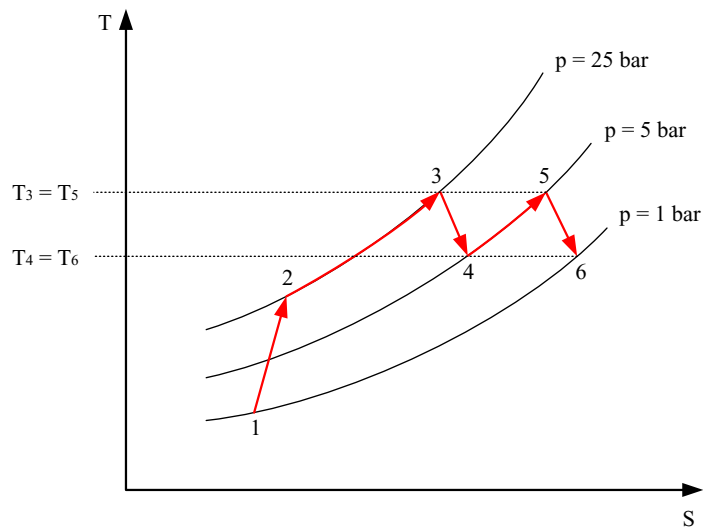


Abbildung 2: Gasturbinen-Prozess mit Zwischenüberhitzung im T,s-Diagramm

c)

$$\begin{aligned}\eta_{SV} &= \frac{T_{2^*} - T_1}{T_2 - T_1} \\ \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} &= \frac{T_1}{T_2^*} \\ \rightarrow T_{2^*} &= T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ c_{p,Luft} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot R_{Luft} \\ \rightarrow \gamma &= \frac{c_{p,Luft}}{c_{p,Luft} - R_{Luft}} = 1,399 \approx 1,4 \\ T_{2^*} &= 288K \cdot \left(\frac{25bar}{1bar}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \\ &= 722,44K \\ \eta_{SV} &= \frac{722,44K - 288K}{800K - 288K} \\ &= 0,849 = 84,9\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P &= \dot{m}_G \cdot w_t \\ &= \dot{m}_G \cdot [w_{t,HD} + w_{t,ND} - w_{t,VD}] \\ &= \dot{m}_G \cdot [(h_3 - h_4) + (h_5 - h_6) - (h_2 - h_1)] \\ &= \dot{m}_G \cdot c_p \cdot [(T_3 - T_4) + (T_5 - T_6) - (T_2 - T_1)] \\ \dot{m}_G &= \frac{P}{c_p \cdot [(T_3 - T_4) + (T_5 - T_6) - (T_2 - T_1)]} \\ \rightarrow T_3 &= T_5 = 1400K \\ \dot{m}_G &= \frac{120MW}{1,005 \frac{kJ}{kgK} \cdot [(1400K - 900K) + (1400K - 900K) - (800K - 288K)]} \\ &= 244,68 \frac{kg}{s}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \eta_{ges} &= \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} \\
 &= \frac{|\dot{W}_{t,HD}| + |\dot{W}_{t,ND}| - \dot{W}_{t,VD}}{\dot{Q}_{23} + \dot{Q}_{45}} \\
 &= \frac{\dot{m}_G \cdot [(h_3 - h_4) + (h_5 - h_6) - (h_2 - h_1)]}{\dot{m}_G \cdot [(h_3 - h_2) + (h_5 - h_4)]} \\
 &= \frac{(T_3 - T_4) + (T_5 - T_6) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_2) + (T_5 - T_4)}
 \end{aligned}$$

→ bekannt : T_1, T_2, T_6

→ unbekannt : $T_3 = T_5, T_4$

$$\rightarrow \eta_{ST1} = \eta_{ST2}$$

$$\eta_{ST1} = \frac{T_3 - T_4}{T_3 - T_{4^*}} = \frac{T_5 - T_6}{T_5 - T_{6^*}} = \eta_{ST2}$$

$$\left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_3}{T_{4^*}} \quad \left(\frac{p_5}{p_6}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_5}{T_{6^*}}$$

$$\left(\frac{25\text{bar}}{5\text{bar}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = \frac{T_3}{T_{4^*}} \quad \left(\frac{5\text{bar}}{1\text{bar}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = \frac{T_5}{T_{6^*}}$$

$$\rightarrow T_{4^*} = T_{6^*} = 0,6314 \cdot T_3$$

$$\rightarrow T_4 = T_6$$

$$\rightarrow \eta_{ges} = \frac{(T_3 - T_6) + (T_3 - T_6) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_2) + (T_3 - T_6)}$$

$$T_3 = \frac{T_2 \cdot (\eta_{ges} - 1) + T_6 \cdot (\eta_{ges} - 2) + T_1}{2 \cdot (\eta_{ges} - 1)}$$

$$= 1350,67\text{K} = T_5$$

$$T_{4^*} = 852,8\text{K}$$

$$\eta_{ST} = 0,8308 = 83,1\%$$

- a) Für den in der Stickstoffflasche verbleibenden Stickstoff ergibt sich eine adiabat isentrope Zustandsänderung.
- b) Da die Zustandsänderung adiabat isentrop verläuft, kann Gleichung (9.63) aus dem Skript verwendet werden. Für die Temperatur ergibt sich also:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1)$$

γ ist dabei das Verhältnis der Wärmekapazitäten und berechnet sich zu:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{R_i + c_v}{c_v} = 1,57 \quad (2)$$

mit

$$R_i = \frac{R}{M} = \frac{8,3143 \text{ J/molK}}{14 \text{ g/mol}} = 593,88 \text{ J/kgK} \quad (3)$$

Damit ergibt sich für die Temperatur T_2 :

$$T_2 = 293,15 \text{ K} \left(\frac{30 \text{ bar}}{130 \text{ bar}} \right)^{\frac{1,57-1}{1,57}} = 172,14 \text{ K} = -101,01 \text{ °C} \quad (4)$$

- c) Die in der Stickstoffflasche verbleibende Masse Stickstoff m_2 kann aus der Idealgasgleichung berechnet werden:

$$m_2 = \frac{p_2 V}{R_i T_2} = \frac{30 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{593,88 \text{ J/kgK} \cdot 172,14 \text{ K}} = 1,467 \text{ kg} \quad (5)$$

- d) Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik für die Stickstoffflasche lautet:

$$\frac{dU}{dt} = \sum \dot{m}h \quad (6)$$

$$\frac{d(mu)}{dt} = -h \dot{m}_{ab} \quad (7)$$

$$d(mu) = -h dm_{ab} \quad (8)$$

$$u dm + m du = -h dm_{ab} \quad (9)$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhanges $dm = -dm_{ab}$ ergibt sich:

$$u dm + m du = h dm \quad (10)$$

$$(u - h) dm + m du = 0 \quad (11)$$

$$-pv dm + m du = 0 \quad (12)$$

$$-R_i T dm + m du = 0 \quad (13)$$

dm lässt sich direkt aus der Idealgasgleichung bestimmen:

$$dm = -\frac{pV}{R_i T^2} dT + \frac{p}{R_i T} dV + \frac{V}{R_i T} dp \quad (14)$$

Der Vorgang ist isochor, womit gilt $dV = 0$. Einsetzen in den 1. Hauptsatz liefert:

$$-R_i T \left(-\frac{pV}{R_i T^2} dT + \frac{V}{R_i T} dp \right) + m c_v dT = 0 \quad (15)$$

$$pV \frac{1}{T} dT - V dp + m c_v dT = 0 \quad (16)$$

$$pV \frac{1}{T} dT - V dp + \frac{pV}{R_i T} c_v dT = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{T} dT - \frac{1}{p} dp + \frac{c_v}{R_i T} dT = 0 \quad (18)$$

$$\frac{R_i + c_v}{R_i} \frac{1}{T} dT = \frac{1}{p} dp \quad (19)$$

Integration liefert:

$$\int_1^2 \frac{R_i + c_v}{R_i} \frac{1}{T} dT = \int_1^0 \frac{1}{p} dp$$

$$\left[\frac{R_i + c_v}{R_i} \ln(T) \right]_1^2 = \left[\ln(p) \right]_1^0$$

$$\frac{R_i + c_v}{R_i} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{R_i}{R_i + c_v}}$$

e) Die beiden Ergebnisse sind identisch, da gilt:

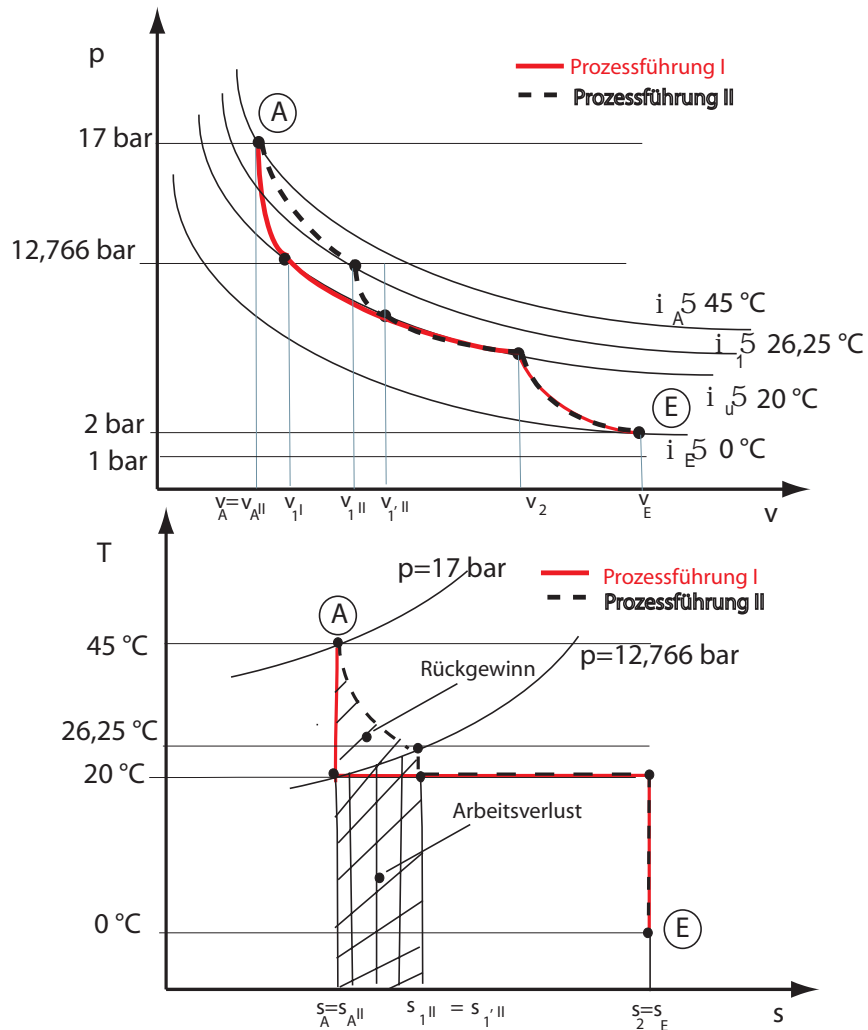
$$\frac{R_i}{R_i + c_v} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad (20)$$

- a) (2 Punkte) Die Prozessführung I verläuft reversibel, d.h. $\dot{S}_{prod} = 0$. (0,5/1,5 Punkte)

Prozessführung I:

- $A \rightarrow 1^I$: Adiabatisch isentrope Expansion bis Umgebungstemperatur.
- $1^I \rightarrow 2$: Isotherme Expansion bei Umgebungstemperatur bis zu der Entropie des Zustandes 2
- $2 \rightarrow E$: Adiabatisch isentrope Expansion bis Zustand E

- b) (6 Punkte) p-v- und T-s-Diagramme.



- c) (Punkte 2) Es handelt sich hier um eine reversible Prozessführung. Die maximale gewinnbare Arbeit

$$\begin{aligned}
 -w_{ex} &= u_A - u_E + p_u \cdot (v_A - v_E) - T_u \cdot (s_A - s_E) \\
 -w_{ex} &= c_v \cdot (T_A - T_E) + p_u \cdot \left(\frac{R_{Luft} \cdot T_A}{p_A} - \frac{R_{Luft} \cdot T_E}{p_E} \right) - \\
 &\quad - T_u \cdot \left(-c_p \cdot \ln \left(\frac{T_E}{T_A} \right) + R_{Luft} \cdot \ln \left(\frac{p_E}{p_A} \right) \right) \\
 \text{mit } c_p - c_v &= R_{Luft} \\
 c_v &= 0,717 \frac{kJ}{kg \cdot K} \\
 -w_{ex} &= 32,265 - 33,826 + 135,168 = 133,607 \frac{kJ}{kg}
 \end{aligned}$$

- d) Prozessführung II:

- $A \rightarrow 1^{II}$: Adiabate Expansion mit dem Expansionswirkungsgrad von $\eta = 0,75$ bis zum Zustand 1^{II} . Adiabate isentrope Expansion bis zum Zustand 1^{III} , da der Prozess die maximale Arbeit erzielen soll.
- $1^{III} \rightarrow 2$: Isotherme Expansion bei Umgebungstemperatur bis zu der Entropie des Zustandes 2 (wie A)
- $2 \rightarrow E$: Adiabate isentrope Expansion bis Zustand E (wie A)

Für den Aufgabeteil d) muss den Zustände 1:

Zuerst berechnet man die die Endtemperatur für die reversible Prozessführung:

$$\begin{aligned}
 \Delta s &= c_p \cdot \ln \left(\frac{T_{1rev}}{T_A} \right) - R_{Luft} \cdot \ln \left(\frac{p_{1rev}}{p_A} \right) \\
 0 &= c_p \cdot \ln \left(\frac{T_{1rev}}{318,15} \right) - R_{Luft} \cdot \ln \left(\frac{12,766}{17} \right) \\
 \ln \left(\frac{T_{1rev}}{318,15} \right) &= \frac{R_{Luft}}{c_p} \cdot \ln \left(\frac{12,766}{17} \right) \\
 \frac{T_{1rev}}{318,15} &= \left(\frac{12,766}{17} \right)^{\frac{R_{Luft}}{c_p}} \\
 T_{1rev} &= 293,15 \text{ K}
 \end{aligned}$$

Die adiabate isentrope Expansion verläuft bis zur Umgebungstemperatur. Die tatsächliche erreichte Temperatur wird anhand des isentropischen Wirkungsgrades berech-

net.

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{T_A - T_1}{T_A - T_{1rev}} \\ 0,75 &= \frac{318,15 - T_1}{318,15 - 293,15} \\ T_1 &= 299,4\end{aligned}$$

e) (2 Punkte) Die Verlustarbeit durch Nichtumkehrbarkeiten errechnet sich durch:

$$w_{Virr} = T_u \cdot \Delta s_{prod}$$

Für die Entropieänderung Δs des idealen Gases setzt man:

$$\begin{aligned}\Delta s_{prod} &= s_{1'} - s_1 = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_{1II}}{T_A}\right) - R_{Luft} \cdot \ln\left(\frac{p_{1II}}{p_A}\right) \\ \Delta s_{prod} &= 1,004 \cdot \ln\left(\frac{299,4}{318,15}\right) - 0,287 \cdot \ln\left(\frac{12,767}{17}\right) \\ \Delta s_{prod} &= 0,02122 \frac{kJ}{kg \cdot K}\end{aligned}$$

ein. Damit erhält man den Arbeitsverlust durch Irreversibilität:

$$\begin{aligned}w_{Virr} &= 293,15 \cdot 0,02122 \\ w_{Virr} &= 6,22 \frac{kJ}{kg}\end{aligned}$$

Logischerweise gilt $|-w_{exII}| < |-w_{exI}|$. Für die adiabate Expansion treten grundsätzlich 3 Größen im Spiel, verglichen zu dem reversiblen Prozess, nämlich dissipierte Energie, Arbeitsverlust durch Irreversibilität und die technische Arbeitsverlust. Da die adiabate Prozessführung bei höheren Temperaturniveau als die Umgebungstemperatur geschieht, kann die Differenz zwischen dissipierter Energie und Arbeitsverlust als Rückgewinn für weitere Prozessabschnitte genutzt werden. Daher unterscheiden sich beiden Prozessführungen durch die entstandenen Verluste durch Irreversibilitäten.

Für die Exergie des Prozesses II kann man zwei Lösungswege nehmen:

Lösungsweg 1:

$$\begin{aligned}-w_{exII} &= -w_{exI} - w_{Virr} \\ -w_{exII} &= 133,607 - 6,22 \\ -w_{exII} &= 133,607 - 6,22 \\ -w_{exII} &= 127,387 \frac{kJ}{kg}\end{aligned}$$

Lösungsweg 2:

Die Prozessführungen unterscheiden sich grundsätzlich zwischen dem Zustand A und dem Zustand 1^{III} . Der Unterschied der gewinnbaren Arbeit für die Prozessführungen I und II in diesem Prozessabschnitt liefert der Verlust der Prozessführung II. Für die Prozessführung $A \rightarrow 1^{III}$ ergeben sich folgende Zustandsänderungen:

Prozessführung I:

- Adiabatisch isentrope Expansion von Zustand A bis zum Zustand 1^I .
- Isotherme Expansion bis zum Zustand 1^{II} .

Prozessführung II:

- Adiabatisch Expansion von Zustand A bis zum Zustand 1^{II} .
- Adiabatisch isentrope Expansion von Zustand 1^{II} bis zum Zustand 1^{III} .

Der nächste Schritt ist die Bestimmung von dem Zustand 1^{III} . Dafür benutzen wir die Gleichung für eine adiabatisch isentrope Expansion zwischen 1^{II} und 1^{III}

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_1^{III}}{p_1^{II}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} &= \frac{T_{1^{III}}}{T_{1^{II}}} \\ \left(\frac{12,767}{p_1^{III}}\right)^{\frac{0,4}{1,4}} &= \frac{299,4}{293,15} \\ p_1^{III} &= 11,857 \text{ bar} \end{aligned}$$

Die maximale gewinnbare Arbeit für beide Teilprozesse kann jetzt bestimmt werden:

Prozessführung I:

Adiabatisch isentrope Expansion von Zustand A bis zum Zustand 1^I

$$\begin{aligned} w_{A \rightarrow 1^I} &= c_v \cdot (T_{1^I} - T_A) + p_u \cdot R_{Luft} \left(\frac{T_{1^I}}{p_1^I} - \frac{T_A}{p_A} \right) \\ &= 0,717 \cdot (293,15 - 318,15) + 0,287 \cdot \left(\frac{293,15}{12,767} - \frac{318,15}{17} \right) \\ &= -16,706 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Isotherme Expansion bis zum Zustand 1^{III}

$$\begin{aligned} w_{1^I \rightarrow 1^{III}} &= -R_{Luft} \cdot T_{1^I} \cdot \ln \left(\frac{p_{1^I}}{p_{1^{III}}} \right) + p_u \cdot R_{Luft} \left(\frac{T_{1^{III}}}{p_{1^{III}}} - \frac{T_{1^I}}{p_{1^I}} \right) \\ &= -0,287 \cdot 293,15 \cdot \ln \left(\frac{12,767}{11,857} \right) + 0,287 \cdot 293,15 \left(\frac{1}{11,857} - \frac{1}{12,767} \right) \\ &= -5,850 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den Teilprozess der Prozessführung I:

$$-w_{exA \rightarrow 1'II}^I = 22,556 \frac{kJ}{kg}$$

Prozessführung II:

Adiabate Expansion von Zustand A bis zum Zustand 1^{II}

$$\begin{aligned} w_{A \rightarrow 1II} &= c_v \cdot (T_{1II} - T_A) + p_u \cdot R_{Luft} \left(\frac{T_{1II}}{p_1^{II}} - \frac{T_A}{p_A} \right) \\ &= 0,717 \cdot (299,4 - 318,15) + 0,287 \cdot \left(\frac{299,4}{12,767} - \frac{318,15}{17} \right) \\ &= -11,568 \frac{kJ}{kg} \end{aligned}$$

Adiabat isentrope Expansion von Zustand 1^{II} bis zum Zustand 1^{III}

$$\begin{aligned} w_{1II \rightarrow 1'III} &= c_v \cdot (T_{1'III} - T_{1II}) + p_u \cdot R_{Luft} \left(\frac{T_{1'III}}{p_1^{III}} - \frac{T_{1II}}{p_1^{II}} \right) \\ &= 0,717 \cdot (299,4 - 293,15) + 0,287 \cdot \left(\frac{293,15}{11,857} - \frac{299,4}{12,767} \right) \\ &= -4,12 \frac{kJ}{kg} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den Teilprozess der Prozessführung II:

$$-w_{exA \rightarrow 1'III}^{II} = 15,684 \frac{kJ}{kg}$$

Der Exergieverlust ist berechnet als:

$$|-w_{exA \rightarrow 1'III}^I| - |-w_{exA \rightarrow 1'III}^{II}| = 22,556 - 15,684 = 6,872 \frac{kJ}{kg} \approx w_{Virr} = 6,22 \frac{kJ}{kg}$$

Die maximale gewinnbare Arbeit für die Prozessführung II:

$$\begin{aligned} -w_{exII} &= -w_{exI} - (|-w_{exA \rightarrow 1'III}^I| - |-w_{exA \rightarrow 1'III}^{II}|) \\ -w_{exII} &= 133,607 - 6,82 \\ -w_{exII} &= 126,72 \frac{kJ}{kg} \end{aligned}$$

- a) - Die Teilchen sind Massepunkte ohne Ausdehnung.
 - Die Teilchen bewegen sich kräftefrei und Stöße mit der Wand und anderen Teilchen verlaufen rein elastisch.
 - Von der Temperatur.
- b) Die Zustandsgleichung für ein ideales Gas lautet:

$$pV = nRT \quad (21)$$

Eingesetzt für die thermodynamischen Größen in den Definitionen für β, Γ und χ :

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{p} \right)_p \right) \quad (22)$$

$$\Gamma = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{V} \right)_V \right) \quad (23)$$

$$\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{nRT}{p} \right)_T \right) \quad (24)$$

Nach der Ausführung der Differentiation:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{nR}{p} \right) \quad (25)$$

$$\Gamma = \frac{1}{p} \left(\frac{nR}{V} \right) \quad (26)$$

$$\chi = \frac{1}{V} \left(\frac{nRT}{p^2} \right) \quad (27)$$

Daraus folgt:

$$\frac{nR}{Vp} = p \frac{nR}{Vp} \cdot \frac{nR}{Vp^2} \cdot T \quad (28)$$

Wird die Zustandsgleichung nach T umgeformt und in die obige Gleichung eingesetzt, folgt daraus:

$$\frac{nR}{Vp} = \frac{nR}{Vp} \quad (29)$$

c)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{nR}{p} \right) \quad (30)$$

Durch Einsetzen in die Gleichung aus der Aufgabenstellung folgt:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = -\frac{nRT}{p} + V = -V + V = 0 \quad (31)$$

Ist die Ableitung an jeder Stelle 0, so ist die Zustandsgröße unabhängig von der Größe, nach der differenziert wurde.

d)

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad (32)$$

$$dU = C_V(T, V) dT + \left(T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right) dV \quad (33)$$

Diese Gleichung wird in zwei Schritten integriert:

$$U(T, V_0) - U(T_0, V_0) = \int_{T_0}^T C_V(T, V_0) dT \quad (34)$$

und

$$U(T, V) - U(T, V_0) = \int_{V_0}^V \left(T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right) dV \quad (35)$$

Addiert ergeben diese Gleichungen:

$$U(T, V) - U(T_0, V_0) = \int_{T_0}^T C_V(T, V_0) dT + \int_{V_0}^V \left(T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right) dV \quad (36)$$

Dabei ist das Differential:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} \quad (37)$$

Durch Einsetzen der thermischen Zustandsgleichung für p , der Beziehung für das Differential und C_V folgt aus Gleichung (20):

$$U(T, V) - U(T_0, V_0) = \int_{V_0}^V \left(\frac{RT}{(V-b)} - \frac{RT}{(V-b)} + \frac{a}{V^2}\right) dV + \int_{T_0}^T n K R dT \quad (38)$$

Integration:

$$\Delta U = -a \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right) + n K R (T - T_0) \quad (39)$$

e) Die Gibbssche Fundamentalgleichung in Enthalpieform ist eine Gleichung für h in Abhängigkeit von s und p $h(s, p)$. Deren totales Differential lautet:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p ds + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s dp \quad (40)$$

Durch einen Vergleich der Koeffizienten ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s = V \quad (41)$$

bzw. für die Form, die nicht auf die Masse bezogen ist:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V \quad (42)$$

Die geeignete Maxwell-Relation lautet:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (43)$$

Die gesuchte Beziehung ergibt sich durch Einsetzen dieser Relation in die gegebene mathematische Beziehung:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V,$$