Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

24. Februar 2006

Klausur zur Vorlesung

Thermodynamik

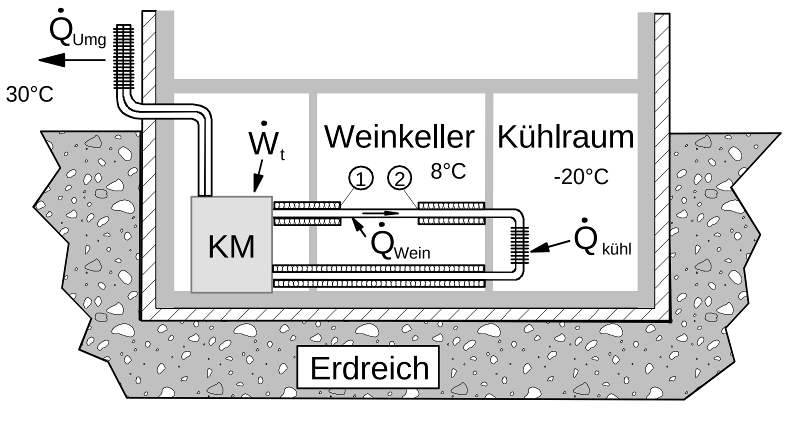
Für alle Aufgaben gilt: Der Rechengang muss erkennbar sein! Interpolationsvorschriften sind anzugeben. Quadratische Gleichungen sind analytisch zu lösen.
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Bitte denken Sie daran, die Seite 6 auf jeden Fall mit abzugeben.

Aufgabe 1: *Kühlung eines Weinkellers* 13 von 50 Punkten

Ein Rechtsstreit hat folgenden Tatbestand: Der Ankläger ist Mieter 1 eines Mehrfamilienhauses, der seinen Keller als Kühlraum ($\vartheta_{Kühl} = -20°C$) verwendet (Abbildung). Die Kälteanlage dazu befindet sich in einem anderen Kellerraum. Zwischen diesen beiden Räumen befindet sich der Keller des Angeklagten, Mieter 2 des Mehrfamilienhauses. Ein Teil der Leitungen führen von der Kälteanlage durch den Raum des Mieters 2 in den Kühlraum von Mieter 1. Der Angeklagte, Mieter 2, hat an der Zuleitung zum Kühlraum die Isolation entfernt und sich einen gut temperierten Weinkeller ($\vartheta_{Wein} = +8°C$) geschaffen. Bei der nächsten Stromrechnung fällt Mieter 1 aus allen Wolken und findet heraus, dass Mieter 2 ihm „Kälte geklaut“ hat. Mieter 2 verteidigt sich vor Gericht, er habe Mieter 1 doch Energie in Form von Wärme zugeführt und möchte dafür im Gegenteil noch bezahlt werden.

Sie sind Sachverständiger des Gerichts. Überprüfen sie diesen Zusammenhang.



Weitere Angaben:

$\dot{Q}_{Kühl} = 1000W$	$\varepsilon_{KM} = \varepsilon_{Carnot}/3$	$\dot{m}_{CO_2} = 0,012kg/s$	$p_{Umg} = 1\,bar$

Zustand des Kältemittels (CO_2) in der Zuleitung ohne Isolationsschicht

$\vartheta_{CO_2} = -20°C$	$h_1 = 280\,kJ/kg$	$s_1 = 1,329\,kJ/(Kkg)$	$v_1 = 0,00911\,m^3/kg$
$p_{CO_2} = 18,53bar$	$h_2 = 300\,kJ/kg$	$s_2 = 1,408\,kJ/(Kkg)$	$v_2 = 0,01041\,m^3/kg$

a) Welche elektrische Leistungsaufnahme $\dot{W}_t$ hat die Kälteanlage im Normalbetrieb ohne den Weinkeller, um den Kühlraum kühl zu halten, wenn draußen eine Umgebungstemperatur von $\vartheta_{Umg} = +30°C$ vorliegt.

b) Berechnen Sie den oben beschriebenen tatsächlich vorliegenden Fall, dass ein zusätzlicher Wärmeeintrag vom Weinkeller hinzukommt, die tatsächliche elektrische Leistungsaufnahme $\dot{W}_t^*$ der Kältemaschine.

c) Berechnen Sie die Exergie der zugeführten Wärme bezogen auf das Kältemittel und die Exergieänderung der Enthalpie des Kältemittels beim Durchqueren des Weinkellers von 1 nach 2.

d) Welchen Rat geben Sie dem Richter? Wer klaut? Was wird geklaut?

Aufgabe 2: *Methangashydrate* 12 von 50 Punkten

Methangashydrate sind schneeweisse Eiskristalle, in denen Methangas eingefangen ist. Die Stabilität dieser Gashydrate hängt vom Druck und der Temperatur ab. In der Tiefsee bei Drücken oberhalb ca. 30 bar und Temperaturen geringfügig über 0 °C sind Methangashydrate thermodynamisch stabil.

In einer Tiefe von L = 500 m und einer Temperatur von T = 280 K bildet sich durch die thermische Zersetzung von Methangashydraten eine aus Methan CH_4 bestehende Gasblase. Der Durchmesser dieser Blase beträgt d = 0,05 m.

a) Ermitteln Sie den am Ort der Entstehung der Methangasblase herrschenden Druck p_0. Dabei wird angenommen, dass auf der Meeresoberfläche ein Druck von $p_{atm} = 1\,bar$ herrscht.

b) Es wird angenommen, dass das Molvolumen des Methans unter den herrschenden Bedingungen von Druck und Temperatur $\underline{V} = 4,16 \cdot 10^{-4}\,m^3/mol$ beträgt. Bestimmen Sie die in der Gasblase befindliche Methanmenge in mol.

c) Ermitteln Sie den in der Gasblase zu erwartenden Druck nach der Van-der-Waals-Zustandsgleichung p_{vdw}.

d) Was könnte die Ursache für den Unterschied zwischen dem Druck aus a) und aus c) sein.

e) Die Methanblase steigt unter dem Einfluss der Auftriebskraft ohne zu zerfallen auf. Berechnen Sie das Volumen der Gasblase unmittelbar vor dem Erreichen der Wasseroberfläche. Hierbei wird eine polytrope Zustandsänderung mit einem Index von n = 1,05 angenommen.

Weitere Angaben:

Dichte des Meereswassers: $\rho = 1000\,kg/m^3$

Erdbeschleunigung: $g = 9,81\,m/s^2$

Van-der-Waals-Zustandsgleichung: $p = R \cdot \frac{T}{(\underline{V} - b)} - \frac{a}{\underline{V}^2}$

mit

$$\begin{aligned} a &= \frac{27}{64} \cdot \frac{R^2 \cdot T_c^2}{p_c} \\ b &= \frac{R \cdot T_c}{8 \cdot p_c} \\ R &= 8,314\,J/(K\,mol) \end{aligned}$$

Molmasse und kritische Daten des Methans:

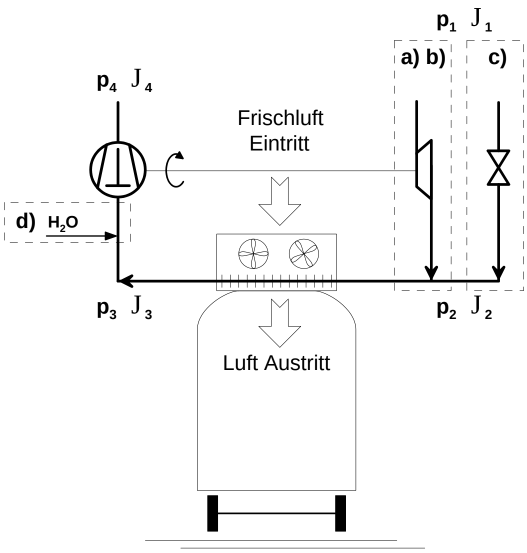
$M = 16\,g/mol$
$T_c = 190,6\,K$
$p_c = 46\,bar$

Es wird weiterhin angenommen, dass die Krümmung der Gas-/Wasser-Grenzfläche die Druckverhältnisse in der Methanblase nicht beeinflußt.

Aufgabe 3: *Klimatisierung eines ICE 3* 13 von 50 Punkten

Untersucht werden soll ein Kaltluftprozess, wie er unter anderem auch zur Klimatisierung des ICE 3 verwendet wird (Luft ist sowohl Kältemittel als auch zu kühlendes Medium). Hierbei handelt es sich um einen halboffenen Prozess (Skizze siehe unten), der trockene Luft (ideales Gas, $c_p/c_v = 7/5$, $c_p = 1\,J/gK$) aus der Umgebung (p_u, ϑ_u) zunächst auf einen Druck $p_2 < p_1 = p_u$ expandiert. Anschließend durchströmt das Kältemittel isobar einen Wärmeübertrager und kühlt in diesem die Frischluft, die in den Passagierraum strömt, ab. Das Kältemittel befindet sich jetzt im Zustand 3. Zuletzt wird die Luft durch einen Verdichter komprimiert und an die Umgebung abgegeben (p_4, ϑ_4).

HINWEISE: Die Buchstaben a), b), c) und d) in der Zeichnung signalisieren die Zugehörigkeit zu einem Aufgabenteil.
$c_{pDampf} = 1,92\ J/gK$ gültig für alle Zustände!
Verdampfungsenthalpie des Wassers bei 0°C: $\Delta h_{V,W} = 2502\ J/g$



Punkt	Druck [bar]	Temperatur [°C]
1	$p_1 = p_u = 1$	$\vartheta_1 = 20$
2	$p_2 = 0,79$	$\vartheta_2 =$
3	$p_3 =$	$\vartheta_3 = 25$
4	$p_4 =$	$\vartheta_4 =$

Kältekreislaufdaten

a) Ergänzen sie die in der Tabelle fehlenden Werte für p_3, p_4, ϑ_2 und ϑ_4 für den Fall, dass der Verdichter und die Expansionsmaschine isentrop arbeiten. Skizzieren sie die Zustandsänderungen 1→2, 2→3 und 3→4 in einem T-s-Diagramm.

b) Der Verdichter und die Expansionsmaschine arbeiten wie in Aufgabenteil a). Die gewonnene Expansionsarbeit wird dem Verdichter als Antriebsenergie wieder zugeführt. Wie groß ist die Kälteleistungszahl $\varepsilon_{b)}$? Wie groß ist die Kälteleistung $\dot{Q}_{b)}$, wenn der Kältemittelmassenstrom $\dot{m}_{b)} = 823,05\frac{g}{s}$ und das Verhältnis von Antriebsenergie zu gewonnener Expansionsarbeit $\frac{|w_{t34}|}{|w_{t12}|} = 1,089$ beträgt?

c) Im Rahmen einer Kosteneinsparmaßnahme soll geprüft werden, ob bei der Zustandsänderung von $1 \rightarrow 2$ die Expansionsmaschine durch eine adiabate Drossel ersetzt werden kann, ohne einen signifikanten Verlust in der Effizienz der Anlage in Kauf nehmen zu müssen. Die Verdichtung soll weiterhin als isentrop angenommen werden. Wie groß ist dann die Kälteleistungszahl $\varepsilon_{c)}$? Wieviel Prozent der Kälteleistung $\dot{Q}_{b)}$ aus Aufgabenteil b) sind bei unverändertem Massenstrom mit diesem Aufbau noch zu erreichen?

d) Anstatt des bisher isentropen Verdichters soll ein realer Verdichter ($\eta_{SV} \neq 1$) zum Einsatz kommen. Um die adiabatische Temperatursteigerung während des Verdichtungsprozesses zu mindern, wird der Wassermassenstrom $\dot{m}_w$ ($\vartheta = 0°C$) vor dem Verdichter in den Kreislauf eingespritzt, so dass die Austrittsbedingungen ϑ_4 und p_4 des Kältemittels zu den vorherigen Aufgabenteilen unverändert bleiben, die relative Feuchte jedoch einen Wert von $\varphi = 6,4\%$ annimmt. Wie groß ist damit der isentrope Verdichterwirkungsgrad η_{SV} des realen Verdichters? Der Enthalpienullpunkt von Wasser wird historisch bei 0°C gewählt.

e) Die Eintrittsbedingungen des über den Wärmeübertrager geleiteten Frischluftstroms $\dot{m}_{Fl}$ liegen bei $\vartheta_{ein} = 30°C$ und einer relativen Feuchte $\varphi_{ein} = 60\%$. Der Luftstrom wird dabei auf eine Temperatur von $\vartheta_{aus} = 20°C$ abgekühlt. Wie groß ist die auskondensierte Wassermenge m_{kond} pro Kilogramm trockener Luft? Wie groß ist der Luftmassenstrom $\dot{m}_{Fl}$, wenn die Kälteleistung $\dot{Q}_{b)}$ zur Verfügung steht? Zeichnen sie den Kondensationsprozess in das auf der folgenden Seite gegebene h-x-Diagramm ein!

p [bar]	ϑ [°C]	h [kJ/kg]
1,00	53,87	556,30
1,00	50,48	552,88
1,00	45,77	548,12
1,00	20,0	522,11
0,79	29,47	531,71
0,79	25,00	527,20
0,79	0,907	-/-
0,79	0,230	-/-

Stoffwerte für Luft

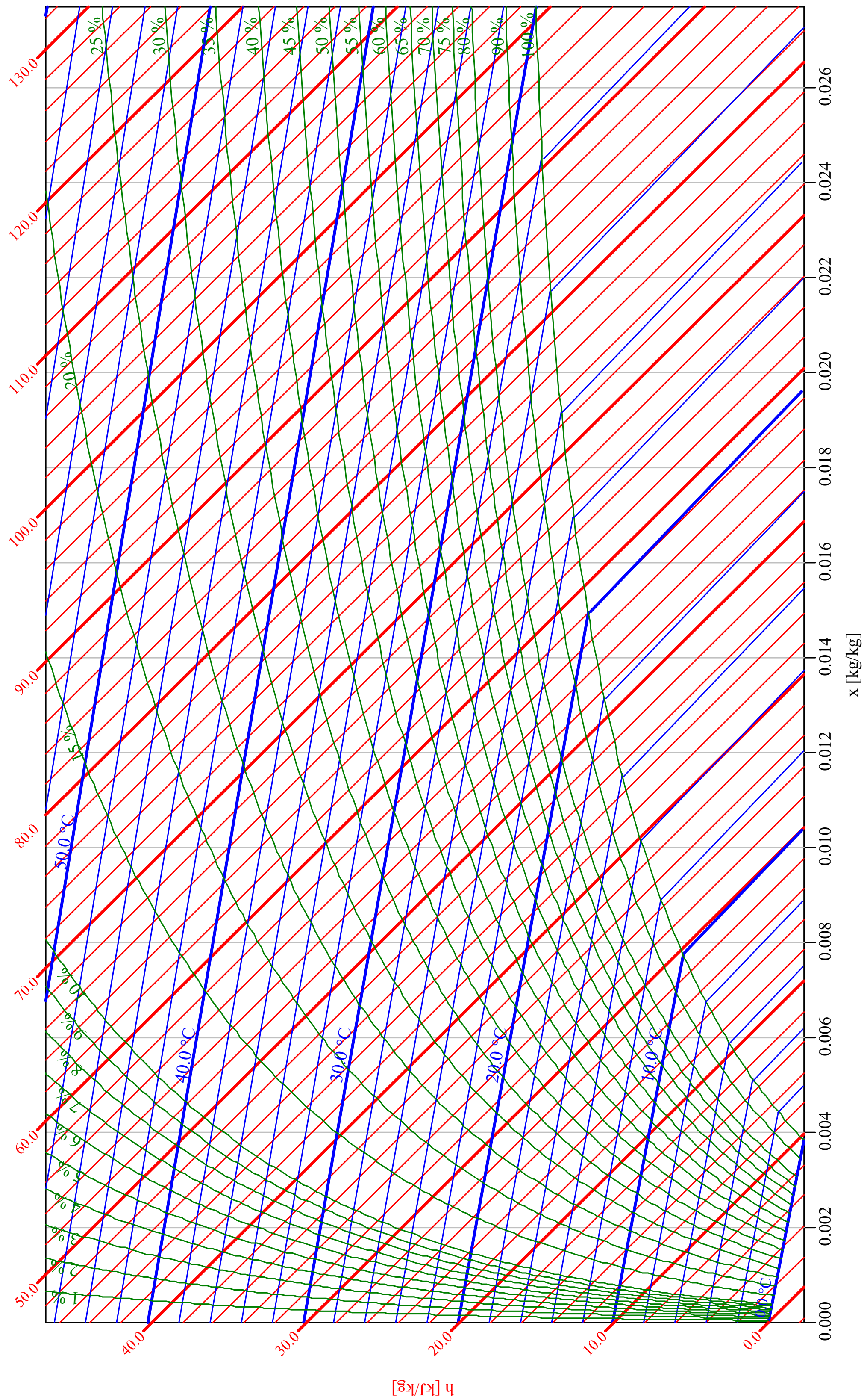


Abbildung 1: h-x-Diagramm nach Mollier (**Dieses Diagramm darf nur für die Klausur verwendet werden!**)

Aufgabe 4: *Thermische Zustandsgleichung und kalorische Größen* 12 von 50 Punkten

Die thermische Zustandsgleichung erhielt ihren Namen, da sich mit ihrer Hilfe die Temperatur relativ einfach bestimmen lässt. Sie liegt häufig in der Form

$$p = p(T, v)$$

vor.

a) Welche zusätzliche Information wird benötigt, um Gleichungen für kalorische Größen aus der thermischen Zustandsgleichung herleiten zu können?

b) Leiten Sie aus der thermischen Zustandsgleichung eine Formel für die spezifische innere Energie her.
Hinweis: Verwenden Sie das vollständige Differential der spezifischen inneren Energie als Ausgangspunkt.

$$du = \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_v dT + \left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_T dv$$

Berücksichtigen Sie außerdem Gleichung (5.13) aus dem Skript Thermodynamik, die hier noch einmal wiederholt werden soll:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_T = T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v - p$$

c) Warum ist es schon aus mathematischer Sicht im Allgemeinen besser, statt der Zustandsgleichung zur Bestimmung kalorischer Größen eine Fundamentalgleichung zu verwenden?

d) Für die spezifische Entropie gilt:

$$s(T, v) = s^0 + \int_{T_0}^{T} c_v^0(\tilde{T}) \frac{d\tilde{T}}{\tilde{T}} + R_i \ln \frac{v}{v_0} + \int_{\infty}^{v} \left[\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{\tilde{v}} - \frac{R_i}{\tilde{v}} \right] d\tilde{v}.$$

Vereinfachen Sie diese Gleichung für Luft als ideals Gas ($R_{Luft} = 287,1$ J/kgK , $\gamma = 1,4$) und bestimmen Sie die spezifische Entropie für $\vartheta = 20$ °C und einen Druck von $p = 1$ bar. Gehen Sie davon aus, dass der Nullpunkt der spezifischen Entropie für Luft bei $(p, \vartheta) = (1 \text{ bar}, 0\ °\text{C})$ definiert ist.

Lösung Aufgabe 1: *Anwendung der Hauptsätze* 11 von 50 Punkten

a) Ansatz über den Carnot-Wirkungsgrad für Kälteprozesse nach Gl. (11.89) aus dem Skript. (Alternativ auch über 1. und 2. Hauptsatz lösbar).

$$\varepsilon_{Carnot} = \frac{T_{K\ddot{u}hl}}{T_{Umg} - T_{K\ddot{u}hl}} = \frac{253,15\,K}{50\,K} = 5,063$$

Lösungsweg 1:

Es gilt:

$$\varepsilon_{Carnot} = \frac{\dot{Q}_{K\ddot{u}hl,Carnot}}{\dot{W}_{t,Carnot}} \; bzw. \; Gl.(11.88) \; \varepsilon_{KM} = \frac{\dot{Q}_{K\ddot{u}hl}}{\dot{W}_t}$$

mit $\varepsilon_{KM} = \varepsilon_{Carnot}/3$ ergibt sich für die elektrische Leistungsaufnahme der Kältemaschine:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{KM} &= \frac{\varepsilon_{Carnot}}{3} = \frac{\dot{Q}_{K\ddot{u}hl}}{\dot{W}_t} \\ \Leftrightarrow \; \dot{W}_t &= \frac{\dot{Q}_{K\ddot{u}hl} \cdot 3}{\varepsilon_{Carnot}} = \frac{1000\,W \cdot 3}{5,063} = 592,53W \end{aligned}$$

Lösungsweg 2:

Es gilt auch:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Carnot} &= \frac{\dot{Q}_{K\ddot{u}hl,Carnot}}{\dot{W}_{t,Carnot}} \\ \Leftrightarrow \; \frac{\dot{Q}_{K\ddot{u}hl,Carnot}}{\varepsilon_{Carnot}} &= \dot{W}_{t,Carnot} = \frac{1000\,W}{5,063} = 197,51\,W \end{aligned}$$

Die tatsächliche Leistungszahl des Prozesses beträgt nur 1/3 der Carnot-Leistungszahl. Die tatsächliche Leistungsaufnahme der Kälteanlage ist daher 3x höher:

$$\underline{\underline{\dot{W}_t}} = 3 \cdot \dot{W}_{t,Carnot} = \underline{\underline{592,53\,W}}$$

b) Das Kontrollvolumen wird um die komplette Kälteanlage mit allen Rohrleitungen gelegt. Zur Bilanzierung werden nur die Energie- und Wärmeströme berücksichtigt, die die Kontrollvolumengrenze überschreiten. Der umlaufende Kältemittelmassenstrom verlässt das Kontrollvolumen nicht und findet daher keine Berücksichtigung. Laut Skizze werden dem System zwei Wärmeströme und ein Energiestrom technischer Arbeit zugeführt sowie ein Wärmestrom an die Umgebung abgeführt.

Durch den Wärmeeintrag $\dot{Q}_{Wein}$ erfährt das Kältemittel eine Zustandsänderung von 1 nach 2.

1. Hauptsatz Rohrabschnitt 1-2:

$$\dot{Q}_{Wein} = \dot{m}_{CO_2} \cdot (h_2 - h_1) = 0,012kg/s \cdot (300\,kJ/kg - 280\,kJ/kg) = 240\,W$$

Lösungsweg 1:

Ansatz über Leistungszahlen:

Die gesamte Leistungsaufnahme der Kälteanlage setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich die Leistungsaufnahmen einerseits zum Kühlen des Kühlraums, andererseits zum Kühlen des Weinkellers:

$$\dot{W}^*_{t,ges} = \underbrace{\frac{\dot{Q}_{Kühl}}{\varepsilon_{KM,Kühl}}}_{\dot{W}_t \text{ aus Teil a)}} + \frac{\dot{Q}_{Wein}}{\varepsilon_{KM,Wein}}$$

In Teil a) bereits berechnet:

$$\varepsilon_{Carnot,Kühl} = \frac{T_{Kühl}}{T_{Umg} - T_{Kühl}} = \frac{253,15\,K}{50\,K} = 5,063 \Rightarrow \varepsilon_{KM,Kühl} = 1,688$$

Analog mit anderen Temperaturen:

$$\varepsilon_{Carnot,Wein} = \frac{T_{Wein}}{T_{Umg} - T_{Wein}} = \frac{281,15\,K}{22\,K} = 12,78 \Rightarrow \varepsilon_{KM,Wein} = 4,26$$

Einsetzen in Gleichung mit $\dot{W}^*_{t,ges}$ liefert:

$$\underline{\underline{\dot{W}^*_{t,ges} = 648,87\,W}}$$

Lösungsweg 2:

Hier gelte die Annahme, das der Prozess reversibel ist. Die Irreversibilitäten werden anschließend über die in der Aufgabenstellung definierte Kälteleistungszahl berücksichtigt.

1. Hauptsatz gesamt:

$$0 = \dot{Q}_{Kühl} + \dot{Q}_{Wein} - \dot{Q}_{Umg} + \dot{W}^*_{t,Carnot}$$

2. Hauptsatz gesamt:

$$0 = \frac{\dot{Q}_{Kühl}}{T_{Kühl}} + \frac{\dot{Q}_{Wein}}{T_{Wein}} - \frac{\dot{Q}_{Umg}}{T_{Umg}}$$

Auflösen nach $\dot{Q}_{Umg}$ ergibt:

$$\dot{Q}_{Umg} = \dot{Q}_{Kühl} \cdot \frac{T_{Umg}}{T_{Kühl}} + \dot{Q}_{Wein} \cdot \frac{T_{Umg}}{T_{Wein}}$$

Einsetzen in 1. Hauptsatz (gesamt) liefert:

$$\dot{W}^*_{t,Carnot} = \dot{Q}_{Kühl} \cdot \underbrace{\left(\frac{T_{Umg}}{T_{Kühl}} - 1\right)}_{1/\varepsilon_{Carnot,Kühl}} + \dot{Q}_{Wein} \cdot \underbrace{\left(\frac{T_{Umg}}{T_{Wein}} - 1\right)}_{1/\varepsilon_{Carnot,Wein}} = 216,29\,W$$

Die tatsächliche Leistungszahl ist wiederum 3x niedriger, die Leistungsaufnahme daher 3x höher:

$$\varepsilon_{KM} = \varepsilon_{Carnot}/3 \Leftrightarrow \dot{W}^*_{t,Carnot} = \dot{W}^*_{t,KM}/3$$

Die Leistungsaufnahme der Kälteanlage erhöht sich bei zusätzlichem Wärmeeintrag aus dem Weinkeller zu:

$$\underline{\underline{\dot{W}^*_{t,KM}}} = 3 \cdot \dot{W}^*_{t,Carnot} = 3 \cdot 216,29\,W = \underline{\underline{648,87\,W}}$$

c) Exergie der Wärme bezogen auf das Kältemittel

Nach Gl. (8.9) gilt hier:

$$\underbrace{-\dot{W}_{ex}}_{Exergie} = \dot{Q}_{Wein} \cdot \left(1 - \frac{T_{Umg}}{T_{CO_2}}\right) = -47,40\,W \Rightarrow Exergie\ entgegen\ dem\ Wärmestrom!!$$

Exergie der Enthalpie bezogen auf das Kältemittel

Gl. (8.6): Exergie der Enthalpie am Punkt 1

$$\underbrace{-\dot{W}_{ex,1,h}}_{Exergie} = \dot{m}_{CO_2} \cdot (h_1 - h_{Umg} - T_{Umg}(s_1 - s_{Umg}))$$

Exergie der Enthalpie am Punkt 2

$$\underbrace{-\dot{W}_{ex,2,h}}_{Exergie} = \dot{m}_{CO_2} \cdot (h_2 - h_{Umg} - T_{Umg}(s_2 - s_{Umg}))$$

Exergieänderung der Enthalpie des Kältemittels von 1 nach 2:

$$-\dot{W}_{ex,1\rightarrow 2,h} = \underbrace{(-\dot{W}_{ex,2,h})}_{austretend} - \underbrace{(-\dot{W}_{ex,1,h})}_{eintretend}$$

h_{Umg} und s_{Umg} heben sich auf.

$$-\dot{W}_{ex,1\rightarrow 2,h} = \dot{m}_{CO_2} \cdot (h_2 - h_1 - T_{Umg}(s_2 - s_1))$$

mit Werten aus der Tabelle ergibt sich:

$$\underline{\underline{-\dot{W}_{ex,1\rightarrow 2,h} = -47,40\,W}} \Rightarrow Exergieabnahme\ von\ 1\ nach\ 2!!$$

d) Mieter 2 führt der Kälteanlage zwar Wärme hinzu, allerdings strömt Exergie entgegen des Wärmestroms in den Weinkeller. Insgesamt macht es sich dadurch bemerkbar, dass eine größere elektrische Leistung der Kälteanlage zuzuführen ist, was nicht im Sinne von Mieter 1 sein sollte. Mieter 2 klaut Exergie.

Aufgabe 2: *Methangashydrate* 12 von 50 Punkten

1. Ermittlung des statischen Druckes p_0

$$
\begin{aligned}
p_0 &= p_{atm} + \rho \cdot L \cdot g \\
&= 10^5 \, \frac{N}{m^2} + 1000 \, \frac{kg}{m^3} \cdot 500 \, m \cdot 9,81 \, \frac{m}{s^2} \\
&= 5005000 \, Pa = 50,05 \, bar
\end{aligned}
$$

2. Ermittlung der Methangasmenge
   Volumen der Gasblase: $V = \frac{4}{3} \cdot \Pi \cdot r^3$
   $r = 0,0025 \, m \rightarrow V = 6,545E - 5 \, m^3$
   Gegeben: $\underline{V} = 4,16E - 4 \, \frac{m^3}{mol}$
   Damit ist: $n = 0,157 \, mol$

3. Ermittlung des Druckes in der Methanblase am Ort der Entstehung mit Hilfe der Van-der-Waals-Zustandsgleichung
   Zustandsgleichung:

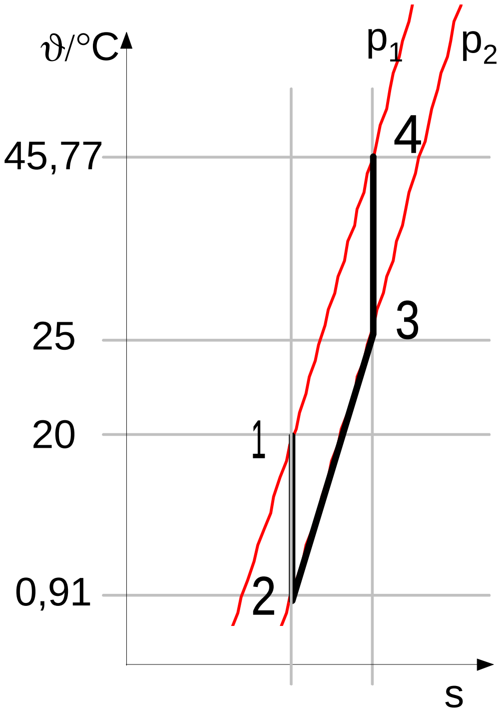
$$
\begin{aligned}
p &= R \cdot \frac{T}{\underline{V} - b} - \frac{a}{\underline{V}^2} \\
a &= \frac{27}{64} \cdot (8,314)^2 \, \frac{Pa^2 \cdot m^6}{K^2 \cdot mol^2} \cdot \frac{(190,6K)^2}{46E5 \, Pa} \\
a &= 0,230 \, \frac{Pa \cdot m^6}{mol^2} \\
b &= 8,314 \, \frac{Pa \cdot m^3}{K \cdot mol} \cdot \frac{190,6 \, K}{8 \cdot 46E5 \, Pa} \\
b &= 4,306E - 5 \, \frac{m^3}{mol} \\
p_{vdw} &= \frac{8,314 \frac{Pa \cdot m^3}{K \cdot mol} \cdot 280K}{4,16E - 4 \, \frac{m^3}{mol} - 4,306E - 5 \, \frac{m^3}{mol}} - \frac{0,230 \, \frac{Pa \cdot m^6}{mol^2}}{(4,16E - 4 \, \frac{m^3}{mol})^2} \\
&= 49,13 \, bar
\end{aligned}
$$

4. Die Ursache für $p_{vdw} < p_0$ ist hauptsächlich auf die Ungenauigkeit des Terms der Van-der-Waals-Gleichung zur Beschreibung der Kohäsionskräfte p_{attr} zurückzuführen

5. Nach G. Zeuner (s. Skript S. 94) gilt für eine polytrope Zustandsänderung:

$$
\begin{aligned}
p \cdot (\underline{V})^n &= konstant \\
\frac{50,05 \, bar}{1 \, bar} &= \left(\frac{V_1 \, m^3}{6,545E - 5 \, m^3} \right)^{1,05} \\
V_1 &= 2,72E - 3 \, m^3
\end{aligned}
$$

a) $p_3 = 0.79bar$ (Aufgabenstellung isobare Wärmeaufnahme)
$p_4 = 1bar$ (isentroper Verdichter verdichtet in Umgebung)
$(\frac{p_1}{p_2})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \vartheta_2 = 0.907°C$ (ad.-isentr.-Zustandsänderung idealer Gase)
$(\frac{p_3}{p_4})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_3}{T_4} \Rightarrow \vartheta_4 = 45.77°C$ (ad.-isentr.-Zustandsänderung idealer Gase)



b) $\varepsilon_{b)} = \frac{1}{\frac{p_1}{p_2}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1} = 14.353$ mit $p_1 > p_2$

Ansatz über gegebene Enthalpien:
Antriebsenergie $w_{t34} = h_4 - h_3 = 20,92\ \frac{kJ}{kg}$ (aus Tabelle Klausur)
$\Rightarrow$ Expansionsarbeit $\frac{|w_{t34}|}{1.089} = w_{t12} = -19,21\ \frac{kJ}{kg}$
$|w_{t12}| + (h_3 - h_1) = q_{23} = q_{b)} = 24,3\ \frac{kJ}{kg}$
$\dot{Q}_{b)} = q_{b)} \cdot \dot{m}_{b)} = 20\ kW$

Ansatz über ideales Gas und Temperaturdifferenzen:
$w_{t34} = c_p \cdot (T_4 - T_3) = 20,77\ \frac{kJ}{kg}$
$w_{t12} = c_p \cdot (T_2 - T_1) = -19,09\ \frac{kJ}{kg}$
$q_{23} = q_{b)} = c_p \cdot (T_3 - T_2) = 24,1\ \frac{kJ}{kg}$
$\dot{Q}_{b)} = q_{b)} \cdot \dot{m}_{b)} = 19,83\ kW$
$\varepsilon_{b)} = \frac{T_3 - T_2}{(T_4 - T_3) + (T_2 - T_1)} = 14,367$

c) $\varepsilon_{c)} = \frac{h_3-h_2}{h_4-h_3} = \frac{(527{,}2-522{,}11) kJ\cdot kg}{(548{,}12-527{,}2) kg\cdot kJ} = 0.243$

$\frac{\dot{Q}_{c)}}{\dot{Q}_{b)}} \cdot 100\% = \frac{h_3-h_{2c)}}{\dot{Q}_{b)}} \cdot 100\% = \frac{h_3-h_1}{\dot{Q}_{b)}} \cdot 100\% = \frac{5{,}09\cdot kJ\cdot kg}{24{,}3\cdot kg\cdot kJ} \cdot 100\% = 20,95\%$

oder über $c_p \cdot \triangle T$-Ansatz

$\frac{c_p(T_3-T_{2c)})}{24{,}1\ \frac{kJ}{kg}} \cdot 100\% = \frac{5\ \frac{kJ}{kg}}{24{,}1\ \frac{kJ}{kg}} \cdot 100\% = 20,75\%$

d) Enthalpie der trockenen Luft vor dem Verdicher:

$$h_L = c_{p,Luft} \cdot \vartheta_3 = 1\frac{kJ}{kgK} \cdot 25°C$$
$$h_L = 25\frac{kJ}{kgK}$$

Enthapie der feuchten Luft hinter dem Verdichter:

Aus hx-Diagramm mit $\vartheta = 45.77°C$ und $\varphi = 6.4\% \rightarrow x = 0.004kg/kg$

$$\begin{aligned} h_{1+x} &= c_{p,Luft} \cdot \vartheta_4 + x_4(c^0_{p,Dampf} \cdot \vartheta_4 + \Delta h_{v,Wasser}) \\ &= 45,77\frac{kJ}{kg} + 0.004(1.92 \cdot 45.77\frac{kJ}{kg} + 2502\frac{kJ}{kg}) \\ &= 56.12\frac{kJ}{kg} \end{aligned}$$

Enthalpiedifferenz zwischen Ein- und Austrittszustand:
$h = h_{1+x} - h_L = (56.12 - 25)\frac{kJ}{kg} = 31.12\frac{kJ}{kg}$

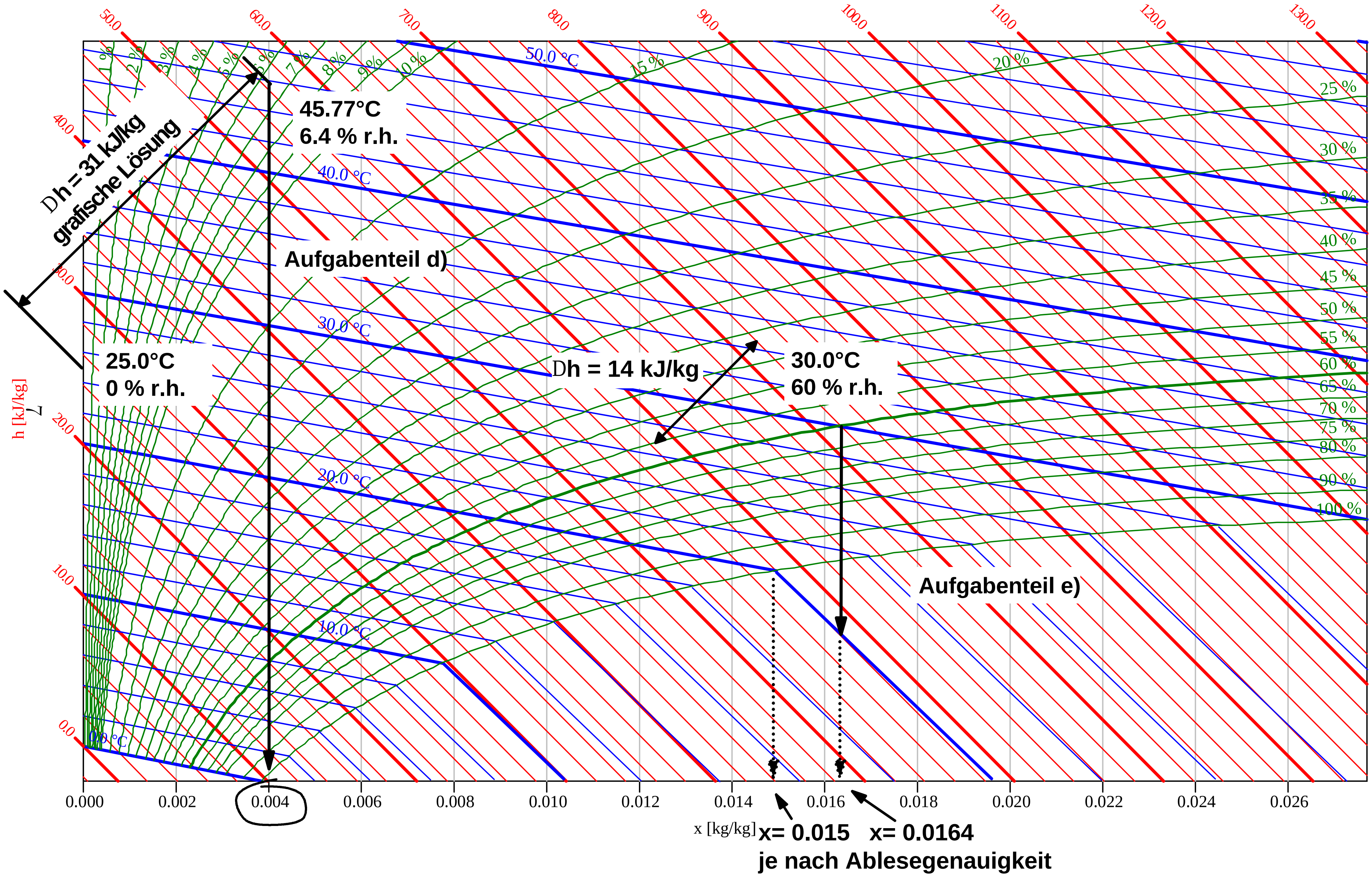
Enthalpiedifferenz ist auch über grafische Lösung bei p = 1 bar möglich (siehe hx-Diagramm). $\Rightarrow \triangle h = 31\frac{kJ}{kg}$

$$\eta_{SV} = \frac{h_4^*-h_3}{h_4-h_3} = \frac{(548.12-527.2)\frac{kJ}{kg}}{31.12\frac{kJ}{kg}} = 0.67$$

e) x(30°C,60%r.h.)=0.0164 kg/kg (s. Skizze)
x(20°C,100%r.h.)=0.015 kg/kg (s. Skizze)
$\rightarrow\ m_{kond} \approx 1.4\frac{g}{kg}$

$\Delta h = h_{Luft\ aus} - h_{Luft\ ein}$ (s. Skizze)
$\Delta h = 14\ kJ/kg$

$\dot{Q} = \dot{m}_{Fl} \cdot \Delta h \rightarrow \dot{m}_{Fl} = \frac{20kW}{14\frac{kJ}{kg}} = 1.43\frac{kg}{s}$ Frischluft


45.77°C
6.4 % r.h.
Dh = 31 kJ/kg
grafische Lösung
Aufgabenteil d)
25.0°C
0 % r.h.
Dh = 14 kJ/kg
30.0°C
60 % r.h.
Aufgabenteil e)
x= 0.015
x= 0.0164
je nach Ablesegenauigkeit
h [kJ/kg]
x [kg/kg]
50.0 °C
40.0 °C
30.0 °C
20.0 °C
10.0 °C
0.0 °C

Aufgabe 4: *Thermische Zustandsgleichung und kalorische Größen* 12 von 50 Punkten

a) Zusätzlich zur thermischen Zustandsgleichung wird die Gleichung für die spezifische isochore Wärmekapazität c_v entlang einer Isochoren benötigt.

b) Setzt man die zweite gegebene Gleichung in die erste ein, so ergibt sich folgende Relation für du:

$$du = \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_v dT + \left[T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v - p\right] dv$$

Weiterhin gilt:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_v = c_v(T, v)$$

Damit gilt:

$$du = c_v(T, v)\, dT + \left[T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v - p\right] dv$$

Diese Gleichung kann nun in zwei Schritten integriert werden. Im ersten Schritt integriert man von $u(T, v)$ bis $u(T, v_0)$ (mit $dT = 0$):

$$u(T, v) - u(T, v_0) = \int_{v_0}^{v} \left[T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{\tilde{v}} - p\right] d\tilde{v}$$

Im zweiten Schritt integriert man vom Zustand $u(T, v_0)$ bis $u(T_0, v_0)$ (mit $dv = 0$) und erhält:

$$u(T, v_0) - u(T_0, v_0) = \int_{T_0}^{T} c_v(\tilde{T}, v_0) d\tilde{T}$$

Durch Addition diese beiden Teilergebnisse erhält man:

$$u(T, v) - u(T_0, v_0) = \int_{T_0}^{T} c_v(\tilde{T}, v_0) d\tilde{T} + \int_{v_0}^{v} \left[T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{\tilde{v}} - p\right] d\tilde{v}$$

Zur Bestimmung der kalorischen Zustandsgleichung wird für eine Isochore $v = v_0$ der Verlauf von c_v benötigt (s. Antwort zu a)). Es ist vorteilhaft, $v_0 \to \infty$ zu wählen, da dann $c_v(T, \infty) = c_v^0(T)$ die spezifische Wärmekapazität im idealen Gaszustand ist. Es gilt:

$$u(T, v) - u(T_0, v_0) = \int_{T_0}^{T} c_v^0(\tilde{T})\, d\tilde{T} + \int_{\infty}^{v} \left[T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{\tilde{v}} - p\right] d\tilde{v}$$

c) Zur Bestimmung kalorischer Größen aus der thermischen Zustandsgleichung muss diese einmal abgeleitet und anschließen integriert werden. Dies führt im Allgemeinen zu einer größeren Abweichung als bei der direkten Berechnung aus einer Fundamentalgleichung.

d) Die thermische Zustandsgleichung für ideale Gase lautet:

$$p = \frac{R_i\, T}{v}$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach der Temperatur ist:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v = \frac{R_i}{v}$$

Damit wird dr letzte Therm in der Formel für die spezifische Entropie zu Null. Für die spezifische isochore Wärmekapazität c_v^0 gilt:

$$c_v = \frac{1}{\gamma - 1}\, R_i$$

Aus der Idealgasgleichung folgt:

$$v = \frac{R_i\, T}{p}$$

Die Gleichung für die spezifische Entropie kann also vereinfacht geschrieben werden als:

$$s(T,p) = s^0 + \frac{1}{\gamma - 1}\, R_i \int_{T_0}^{T} \frac{d\tilde{T}}{\tilde{T}} + R_i\, \ln \frac{T\, p_0}{p\, T_0}$$

und nach der Integration:

$$s(T,p) = s^0 + \frac{1}{\gamma - 1}\, R_i\, \ln \frac{T}{T_0} + R_i\, \ln \frac{T\, p_0}{p\, T_0}$$

Mit $s(0\ ^\circ\mathrm{C}, 1\ \mathrm{bar}) = 0\ \mathrm{J/kgK}$ folgt für die spezifische Entropie von Luft bei 20°C und 1 bar:

$$\begin{aligned} s(293,15\ \mathrm{K}, 1 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}) &= 3,5 \cdot 287,1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}\ \ln \frac{293,15\ \mathrm{K}}{273,15\ \mathrm{K}} \\ &= 71,01\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}} \end{aligned}$$