Institut für Thermodynamik 24.2.2005
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

Klausur zur Vorlesung

Thermodynamik

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechengang muss erkennbar sein! Interpolationsvorschriften sind anzugeben. Quadratische Gleichungen sind analytisch zu lösen.
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Carnot Prozess* 10 von 50 Punkten

Ein Carnot-Prozess soll zwischen 27°C und 500°C betrieben werden. Als Arbeitsmedium dient 1 kg Luft, die als ideales Gas betrachtet wird ($R_i = 0,2871$ kJ/kgK, $\gamma = 1,4$ und $c_p = 1,005$ kJ/kgK). Der niedrigste Druck im Prozess beträgt 0,25 bar und die abgeführte Wärme 250 kJ/kg.

Hinweis:
Die Aufgabenteile a) bis d) sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Welche Zustandsänderungen bilden einen Carnot-Prozess?

b) Geben Sie den Druck, das spezifische Volumen und die Temperatur an den vier Eckpunkten des Prozesses an. Nutzen Sie die Nummerierung, die in der folgenden Tabelle gegeben ist.

Punkt	Druck	Temperatur	spezifisches Volumen
1		500°C	
2		500°C	
3	0,25 bar	27°C	
4		27°C	

Tip: Beginnen Sie mit der Berechnung am Punkt 3!
(Ersatzergebnisse: $p_1 = 125$ bar, $p_2 = 7$ bar)

c) Bestimmen Sie die zugeführte Wärme und die technische Arbeit des Kreisprozesses.

d) Geben Sie den thermischen Wirkungsgrad an.

Aufgabe 2: *$c_p - c_v$ aus Zustandsgleichung* 11 von 50 Punkten

Die Differenz der spezifischen isobaren Wärmekapazität und der spezifischen isochoren Wärmekapazität ist allgemein gegeben als

$$c_p - c_v = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p .$$

a) Zeigen Sie, wie man damit zum bekannten Ergebnis für das ideale Gas kommt.

b) Für ein reales van–der–Waals–Gas gilt folgende thermische Zustandsgleichung:

$$p = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{v^2}$$

Berechnen Sie hierfür mit der oben angegebenen Formel $(c_p - c_v)$.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) und b). Bei welchem Gas ist die Differenz der Wärmekapazitäten höher? Wodurch ist der Unterschied zu begründen?

Aufgabe 3: *Feuchte Luft in einer Armbanduhr* 7 von 50 Punkten

An einem Frühlingstag mit $\vartheta_1 = 20°C, p_u = 1bar$ wird in einem Uhrenwerk eine Armbanduhr fertiggestellt. Als im Herbst Außentemperaturen von $\vartheta_1 = 10°C$ erreicht werden, beginnt das Uhrenglas von innen zu beschlagen.

a) Berechnen Sie den Wassergehalt x im Inneren der Armbanduhr.

b) Welche Luftfeuchtigkeit herrschte am Herstellungstag in der Fertigungshalle.

c) Schlagen Sie Maßnahmen zur Reparatur der Uhr vor.

Hinweise:

Der Dampfdruck von reinem Wasser lässt sich durch folgende Gleichung bestimmen

$$p_{W,s} = 0,018\, bar \cdot \exp\left(18,33 - 5300\frac{K}{T}\right)$$

Die Luft soll sich wie ein idealer Gas verhalten, $M_L = 29\,g/mol$, $M_W = 18\,g/mol$.

Aufgabe 4: *Pkw-Klimaanlage* 11 von 50 Punkten

Eine Pkw-Klimaanlage soll für den Betrieb mit dem Kältemittel R744 (Kohlendioxid) ausgelegt werden. Der Kreisprozess soll mittels eines einstufigen Prozesses realisiert werden, der sich aus folgenden Anfangszustand und Zustandsänderungen zusammensetzt:

Anfangszustand 1: $p_1 = 37.7$ bar und $\vartheta_1 = 10°C$

1→2: adiabate Verdichtung von Zustand 1 bis zum Zustand 2, $p_2 = 72.31$ bar mit einem isentropen Verdichter Wirkungsgrad η_{sV}=0.70

2→3: isobare Enthitzung des Gases bis zum Zustand 3, $T_3 = 30°C$

3→4: isobare Wärmeabfuhr im Kondensator bis zum Zustand 4, gesättigte Flüssigkeit

4→5: isobare Unterkühlung von 7K bis zum Zustand 5

5→6: adiabate isenthalpe Drosselung auf den Druck $p_6 = 37.7$ bar

6→7: isobare Wärmezufuhr bei $\vartheta = 3°C$ im Verdampfer bis zum Zustand 7, gesättigter Dampf

7→1: isobare Überhitzung im Verdampfer von 7K bis zur Temperatur $\vartheta_1 = 10°C$

Die Klimaanlage soll eine Kälteleistung von $\dot{Q}_0 = 7$ kW besitzen.

Hinweis: Der kritische Druck des Kohlendioxids ist $p_{krit} = 73.834$ bar mit der entsprechenden kritischen Temperatur $\vartheta_{krit} = 31.06$ °C. Die Stoffdaten für Kohlendioxid sind in den Tabellen 1 und 2 gegeben.

p (bar)	ϑ (°C)	v' $\frac{m^3}{kg}$	v" $\frac{m^3}{kg}$	h' $\frac{kJ}{kg}$	h" $\frac{kJ}{kg}$	s' $\frac{kJ}{kg \cdot K}$	s" $\frac{kJ}{kg \cdot K}$
33.94	-1	0.00107	0.01057	197.549	431.475	0.991	1.851
37.70	3	0.00110	0.00931	207.392	428.997	1.026	1.828
38.19	3.5	0.00110	0.00916	208.650	428.643	1.030	1.825
39.69	5	0.00112	0.00873	212.461	427.513	1.043	1.816
72.31	30	0.00168	0.00290	304.680	365.418	1.344	1.544

Tabelle 1: Nassdampfgebiet

p bar	ϑ °C	v $\frac{m^3}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	s $\frac{kJ}{kg \cdot K}$
37.00	15	0.0109768	450.832	1.908
37.00	10	0.010453016	443.136	1.881
38.00	10	0.010027546	441.038	1.870
72.31	43.2	0.005318648	439.812	1.789
72.31	57.30	0.006272935	467.030	1.873
80.00	50	0.004561984	436.312	1.763
80.00	68.26	0.005671215	472.989	1.874

Tabelle 2: Gasgebiet

a) Skizzieren der Kreisprozess im p,h Diagramm.

b) Bestimmen Sie die Enthalpien h_1 bis h_7. Für die Berechnung des Prozesses 4$\rightarrow$5 benutzen Sie die isobare Wärmekapazität von flüssigem CO_2 $c_p = 5.537 \frac{kJ}{kg \cdot K}$.

c) Berechnen Sie die Kälteleistungszahl ϵ dieses Systems unter der Annahme, dass die gesamte im Verdampfer umgesetzte Leistung zur Kälteleistung beiträgt.

d) Berechnen Sie den Massenstrom und die Antriebsleistung des Verdichters.

Aufgabe 5: *Anwendung der Hauptsätze* 11 von 50 Punkten

Die Klimaanlage eines Transporters für Tiefkühlkost (Pizza, Fisch, Gemüse) soll im Sommer in Deutschland bei einer Umgebungstemperatur von $\vartheta_{Umg} = 30°C$ eine Innenraumtemperatur von $\vartheta_{Innen} = -18°C$ gewährleisten. Der von außen durch die Isolation des Transporters einfallende Wärmestrom ist der Temperaturdifferenz proportional und beträgt:

$$\dot{Q}_{Last} = kA(T_{Umg} - T_{Innen}),$$

wobei $A = 30m^2$ die Oberfläche des Kühlraums und $k = 0,7W/(m^2K)$ den Wärmedurchgangskoeffizienten angibt, der die thermische Isolationswirkung des Systems beschreibt. Die Klimaanlage führt den Wärmestrom als Kälteleistung aus dem Kühlraum in die Umgebung ab.

a) Skizzieren Sie die Gesamtanordnung schematisch und tragen Sie alle Energieströme ein.

b) Welche Antriebsleistung $\dot{W}_t$ muss der stationär und reversibel arbeitenden Klimaanlage zugeführt werden, damit die Innenraumtemperatur von $\vartheta_{Innen} = -18°C$ bei einer Umgebungstemperatur von $\vartheta_{Umg} = 30°C$ gehalten wird?

Statt eines Dauerbetriebes wird die Klimaanlage getaktet. Das bedeutet, dass sie sich bei $\vartheta_{Innen,An} = -18°C$ einschaltet und den Transporter abkühlt, bis eine Temperatur von $\vartheta_{Innen,Aus} = -22°C$ erreicht ist. Dann schaltet sich die Klimaanlage ab, so dass sich der Kühlraum durch die temperaturabhängige Wärmelast

$$\dot{Q}_{Last}(T) = kA(T_{Umg} - T) \neq konst.$$

langsam wieder aufheizt. Die Kapazitäten der Wände und der Tiefkühlkost werden vernachlässigt. Betrachtet werden soll Luft der Masse $m_{Luft} = 18kg$ mit einer Wärmekapazität von $c_{v,Luft} = 0,717\frac{kJ}{kg\ K}$.

c) Nach welcher Zeit hat sich der Kühlraum wieder auf $\vartheta_{Innen,An} = -18°C$ aufgewärmt, so dass die Klimaanlage wieder eingeschaltet werden muss?

Das gleiche Fahrzeug soll im Winter in Norwegen zum Transport von Blumen eingesetzt werden. Anstelle der Klimaanlage wird eine reversible Wärmepumpe betrieben, welcher die Antriebsleistung $\dot{W}_t = 200W$ zugeführt wird.

d) Bis zu welcher minimalen Temperatur ϑ_{Umg} kann die Wärmepumpe den Kühlraum des Transporters beheizen, damit die vorgegebene Transporttemperatur der Blumen von $\vartheta_{Innen} = +2°C$ gewährleistet ist?

Lösung: Carnot-Prozess

a)
- isotherme Wärmezufuhr
- adiabat isentrope Entspannung
- isotherme Wärmeabfuhr
- adiabat isentrope Verdichtung

b) *Die Nummerierung entspricht der Nummerierung, die in Abbildung 6.7 im Skript verwendet wird.*

Am Punkt 3 sind der Druck ($p_3 = 0,25$ bar) und die Temperatur ($T_3 = 27°$C) bekannt. Daraus kann mit Hilfe der Idealgasgleichung das spezifische Volumen bestimmt werden:

$$v_3 = \frac{R_i T_3}{p_3} = \frac{287,1 \text{ J/kgK} \cdot 300,15 \text{ K}}{25000 \text{ N/m}^2} = 3,45 \text{ m}^3\text{/kg} \tag{1}$$

Der Druck p_4 kann mit Hilfe der Formel (9.58) aus dem Skript berechnet werden. Angepasst an die vorliegende Aufgabe lautet die Gleichung:

$$-q_{34} = p_3 v_3 \ln\left(\frac{p_4}{p_3}\right) \tag{2}$$

Der Druck p_4 ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} p_4 &= p_3 \cdot \exp\left(\frac{-q_{34}}{p_3 v_3}\right) \\ &= 25000 \text{ N/m}^2 \cdot \exp\left(\frac{250000 \text{ J/kg}}{25000 \text{ N/m}^2 \cdot 3,45 \text{ m}^3\text{/kg}}\right) \\ &= 4,54 \text{ bar} \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei ist die abgeführte Wärme gegeben mit $q_{34} = -250$ kJ/kg. Das spezifische Volumen errechnet sich erneut mit Hilfe der Idealgasgleichung zu:

$$v_4 = \frac{R_i T_4}{p_4} = \frac{287,1 \text{ J/kgK} \cdot 300,15 \text{ K}}{454000 \text{ N/m}^2} = 0,19 \text{ m}^3\text{/kg} \tag{4}$$

Der Hochdruck p_1 kann mit Hilfe der Formel (9.63) aus dem Skript berechnet werden. Diese lautet:

$$\left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_1}{T_4} \tag{5}$$

Die Temperatur T_1 ist gegeben ($T_1 = 500°\text{C}$). Daraus ergibt sich der Druck p_1 wie folgt:

$$p_1 = p_4 \left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 454000\ \text{N/m}^2 \cdot \left(\frac{773,15\ \text{K}}{300,15\ \text{K}}\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 124,54\ \text{bar} \quad (6)$$

Das spezifische Volumen v_1 ist:

$$v_1 = \frac{R_i T_1}{p_1} = \frac{287,1\ \text{J/kgK} \cdot 773.15\ \text{K}}{12454000\ \text{N/m}^2} = 0,018\ \text{m}^3/\text{kg} \quad (7)$$

Der Druck p_2 berechnet sich nach Gleichung (9.63) aus dem Skript:

$$\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_2}{T_3} \quad (8)$$

Daraus folgt:

$$p_2 = p_3 \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 25000\ \text{N/m}^2 \cdot \left(\frac{773,15\ \text{K}}{300,15\ \text{K}}\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 6,86\ \text{bar} \quad (9)$$

Für das spezifische Volumen ergibt sich:

$$v_2 = \frac{R_i T_2}{p_2} = \frac{287,1\ \text{J/kgK} \cdot 773,15\ \text{K}}{686000\ \text{N/m}^2} = 0,32\ \text{m}^3/\text{kg} \quad (10)$$

Die folgende Tabelle fasst alle Ergebnisse zusammen:

Punkt	**Druck**	**Temperatur**	**spezifisches Volumen**
1	124,54 bar	500°C	0,018 m^3/kg
2	6,86 bar	500°C	0,32 m^3/kg
3	0,25 bar	27°C	3,45 m^3/kg
4	4,54 bar	27°C	0,19 m^3/kg

c) Die zugeführte Wärme berechnet sich mit Hilfe der Formel (9.58) aus dem Skript:

$$\begin{aligned} q_{12} &= p_1 v_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \\ &= 12454000\ \text{N/m}^2 \cdot 0,018\ \text{m}^3/\text{kg} \cdot \ln\left(\frac{12454000\ \text{N/m}^2}{686000\ \text{N/m}^2}\right) \\ &= 649,86\ \text{kJ/kg} \end{aligned} \quad (11)$$

Die technische Arbeit w_t ist die Summe der zu- und abgeführten Wärmemengen:

$$w_t = q_{12} + q_{34} = 649,86 \text{ kJ/kg} + (-250 \text{ kJ/kg}) = 399,86 \text{ kJ/kg} \quad (12)$$

(Ersatzergebnisse: q_{34} = 639,81 kJ/kg und w_t = 389,81 kJ/kg)

d) Der Carnotsche Wirkungsgrad berechnet sich nach Gleichung (6.76) aus dem Skript:

$$\eta_C = \frac{T_1 - T_3}{T_1} = \frac{773,15 \text{ K} - 300,15 \text{ K}}{773,15 \text{ K}} = 0,61 \quad (13)$$

Lösung $c_p - c_v$:

a) Thermische Zustandsgleichung für das ideale Gas:

$$pV = nRT \Rightarrow pv = R_i T \tag{14}$$

mit $R_i = \frac{R}{M}$.

$\Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R_i}{v}$ und $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R_i}{p}$.

Daraus folgt

$$c_p - c_v = T\frac{R_i^2}{pv} = R_i \tag{15}$$

b) Die gegebene Zustandsgleichung lautet:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} = p(v,T)$$

Daraus folgt:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} \tag{16}$$

$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ erhält man mit dp=0:

$$\begin{aligned} dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dT &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Longleftrightarrow \left(-\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}\right) dv + \frac{R}{v-b} dT &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \frac{dv}{dT} &= -\frac{\frac{R}{v-b}}{\left(\frac{2a}{v^3} - \frac{RT}{(v-b)^2}\right)} \\ \frac{dv}{dT} &= -\frac{1}{(v-b)\left(\frac{2a}{Rv^3} - \frac{T}{(v-b)^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{T}{(v-b)} - \frac{2a(v-b)}{Rv^3}} \\ &= \frac{Rv^3(v-b)}{TRv^3 - 2a(v-b)^2} = \frac{(v-b)}{T - \frac{2a}{R}\left(\frac{(v-b)^2}{v^3}\right)} \end{aligned}$$

damit:

$$\begin{aligned}
c_p - c_v &= T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\
&= T\frac{R}{(v-b)}\frac{(v-b)}{T - \frac{2a}{R}\left(\frac{(v-b)^2}{v^3}\right)} \\
&= \frac{R}{1 - \frac{2a}{RT}\frac{(v-b)^2}{v^3}}
\end{aligned}$$

c)

$$\frac{(c_p - c_v)_{real}}{(c_p - c_v)_{ideal}} = \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{2a}{RT}\frac{(v-b)^2}{v^3}}_{>0}} \underbrace{\approx}_{\substack{\text{vernachlässige} \\ \text{Terme mit } a \cdot b}} \frac{1}{1 - \frac{2a}{RTv}} \underbrace{\propto}_{\substack{\text{Entwicklung:} \\ \frac{1}{1-ka} \approx 1 + ka}} a$$

Man erkennt also:

$$(c_p - c_v)_{real} > (c_p - c_v)_{ideal}$$

(Anm.: Grenzfall $a \to 0$ bzw. $v \to b$ entspricht dem idealen Gas.)
Antwort: Die Adhäsionskräfte sorgen im Wesentlichen dafür, dass beim realen Gas $(c_p - c_v)$ größer ist.

Feuchte Luft in einer Armbanduhr (7 Punkte)

An einem Frühlingstag mit $\vartheta_1 = 20°C, p_u = 1bar$ wird in einem Uhrenwerk eine Armbanduhr fertiggestellt. Als im Herbst Außentemperaturen von $\vartheta_1 = 10°C$ erreicht werden, beginnt das Uhrenglas von innen zu beschlagen.

a) Berechnen Sie den Wassergehalt x im Inneren der Armbanduhr.

b) Welche Luftfeuchtigkeit herrschte am Herstellungstag in der Fertigungshalle.

c) Schlagen Sie Maßnahmen zur Reparatur der Uhr vor.

Hinweise:
Der Dampfdruck von reinem Wasser lässt sich durch folgende Gleichung bestimmen

$$p_{W,s} = 0,018\,bar \cdot \exp\left(18,33 - 5300\frac{K}{T}\right)$$

Die Luft soll sich wie ein idealer Gas verhalten, $M_L = 29\,g/mol$, $M_W = 18\,g/mol$.

Lösung

zu a) Für den Zustand 1 (Frühling) gilt

$$\vartheta_1 = 20°C, \qquad p_1 = p_u = 1\,bar, \qquad x_1 =?$$

Vom Zustand 2 (Herbst) ist bekannt

$$\vartheta_2 = 10°C, \qquad p_2 =?, \qquad x_2 = x_1 = x_s(\vartheta_2, p_2).$$

Da das im Uhrengehäuse eingeschlossene Volumen konstant bleibt, ist die Zustandsänderung $1 \to 2$ isochor, d.h. $V_2 = V_1$, und p_2 berechnet sich für ein ideales Gas aus

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 0,96589\,bar.$$

Der Sättigungspartialdruck bei ϑ_2 ist

$$p_2(\vartheta_2) = 0,018\,bar \cdot exp\left(18,33 - \frac{5300\,K}{283,15\,K}\right) = 0,0122\,bar.$$

Damit folgt für den Wassergehalt x

$$x_1 = x_2 = x_s(\vartheta_2, p_2) = \frac{p_s(\vartheta_2)}{p_2 - p_s(\vartheta_2)} \cdot \frac{M_W}{M_L} = 7,94\,10^{-3}.$$

zu b) Die Luftfeuchtigkeit im Zustand 1 berechnet sich aus

$$\varphi_1 = \frac{p_D(\vartheta_1 = 20°C)}{p_s(\vartheta_1 = 20°C)}$$

Der Sättigungspartialdruck bei ϑ_1 lässt sich wiederum mit der angebenen Gleichung ermitteln, und es folgt

$$p_s(\vartheta_1 = 20°C) = 0,02313\, bar.$$

Für den Dampfdruck bei ϑ_1 gilt

$$\begin{aligned} p_D(\vartheta_1 = 20°C) &= p_1 \frac{x_1}{x_1 + \frac{M_W}{M_L}} \quad \text{mit} \quad x_1 = x_2 = 7,94\, 10^{-3} \\ &= \frac{p_1}{p_2} p_s(\vartheta_1 = 10°C) \\ &= 0,01263\, bar. \end{aligned}$$

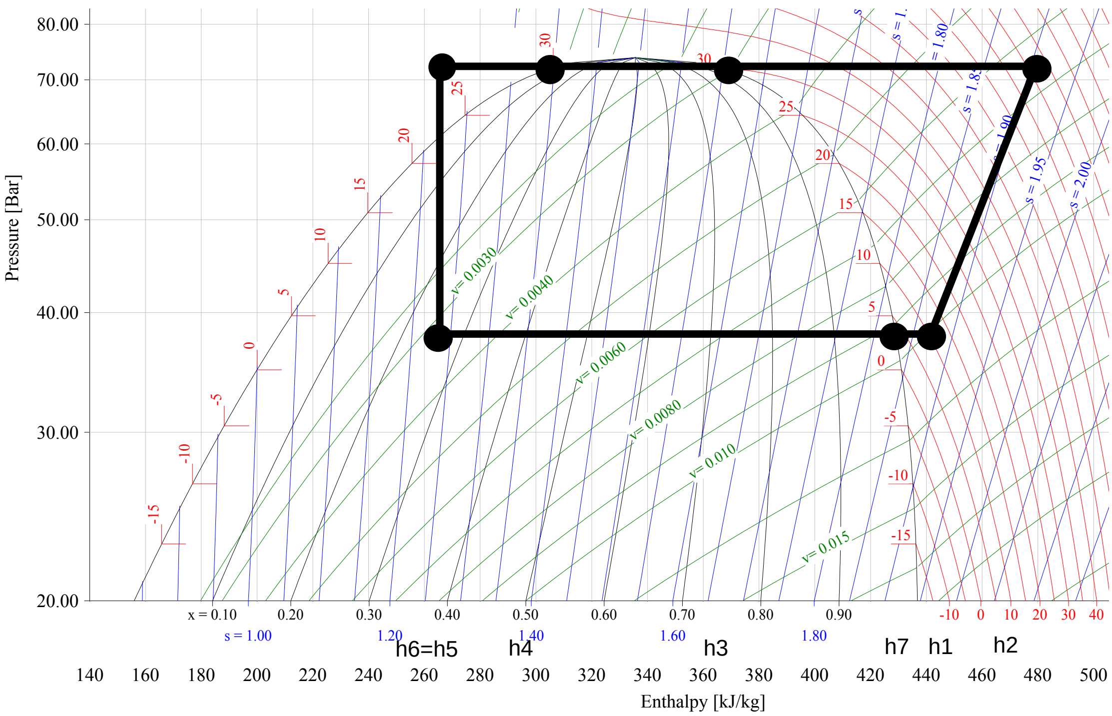
Damit folgt für die Luftfeuchtigkeit

$$\varphi_1 = \frac{p_D(\vartheta_1 = 20°C)}{p_s(\vartheta_1 = 20°C)} = \frac{0,01263}{0,02312} = 0,546308.$$

zu c) Da warme Luft mehr Feuchtigkeit aufnehmen kann als kalte Luft, muss die Uhr zunächst geöffnet und bei erhöhter Temperatur getrocknet werden; das Schließen der Uhr muss dann aber bei tiefen Temperaturen erfolgen.

Lösung Pkw-Klimaanlage

[**a**]



[**b**]

Anfangszustand 1 .

Aus der Tabelle 2 führt man eine lineare Interpolation durch, um die Werte h_1 und s_1 zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{h_1 - h_{37bar}}{h_{38bar} - h_{37bar}} &= \frac{37.70bar - 37bar}{38bar - 37bar} \\
h_1 &= h_{37bar} + (h_{38bar} - h_{37bar}) \cdot \frac{37.70bar - 37bar}{38bar - 37bar} \\
h_1 &= 443.136 + (441.038 - 443.136) \cdot (0.41176) \\
h_1 &= 441.668 \quad \frac{kJ}{kg}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{s_1 - s_{37bar}}{s_{38bar} - s_{37bar}} &= \frac{37.70bar - 37bar}{38bar - 37bar} \\
s_1 &= s_{37bar} + (s_{38bar} - s_{37bar}) \cdot \frac{37.70bar - 37bar}{38bar - 37bar} \\
s_1 &= +() \cdot (0.41176) \\
s_1 &= 1,8733 \quad \frac{kJ}{kg}
\end{aligned}
$$

<u>Prozess 1 → 2</u>.

Aus der Tabelle 2 bestimmt man die Enthalpie für die isentrope Verdichtung $h_2^* = 467.030 \quad \frac{kJ}{kg}$.
Aus der Definition von dem isetropen Wirkungsgrad ($\eta_{sV} = \frac{h_2^* - h1}{h_2 - h_1}$) bestimmt man die Enthalpie h_2.

$$
\begin{aligned}
0.7 &= \frac{467.030 - 441.676}{h_2 - 441.676} \\
0.70 h_2 - 309.173 &= 25.354 \\
0.70 h_2 &= 334.5272 \\
h_2 &= 477.890 \quad \frac{kJ}{kg}
\end{aligned}
$$

<u>Prozess 2 → 3</u> .

Aus der Tabelle 1 $h_3 = 365.418 \quad \frac{kJ}{kg}$

<u>Prozess 3 → 4</u> .

Aus der Tabelle 1 $h_4 = 304.680 \quad \frac{kJ}{kg}$

<u>Prozess 4 → 5</u> .

$$
\begin{aligned}
q_{4\to5} &= h_5 - h_4 \\
q_{4\to5} &= c_p \cdot (T_5 - T_4) \\
h_5 - h_4 &= c_p \cdot (T_5 - T_4) \\
h_5 - h_4 &= 5.537 \cdot (-7) \quad da \quad Unterkuehlung \\
h_5 &= 265.921 \quad \frac{kJ}{kg}
\end{aligned}
$$

Prozess $5 \rightarrow 6$.

Adiabate isenthalpe Drosselung $h_5 = h_6$

Prozess $6 \rightarrow 7$.

Aus der Tabelle 1 $h_7 = 428.997 \quad \frac{kJ}{kg}$

[**c**]

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{h_1 - h_6}{h_2 - h_1} \\
\epsilon &= \frac{441.676 - 265.921}{477.890 - 441.676} \\
\epsilon &= \frac{176.055}{36.214} \\
\epsilon &= 4.86
\end{aligned}
$$

[**d**]

Massenstrom (1 1/2 Punkt).
1. Hauptsatz am Verdampfer:

$$
\begin{aligned}
\dot{Q}_0 &= \dot{m} \cdot (h_1 - h_6) \\
\dot{m} &= \frac{\dot{Q}_0}{h_1 - h_6} \\
\dot{m} &= \frac{7000}{176055} \\
\dot{m} &= 0.03976 \quad \frac{kg}{s} \\
\dot{m} &= 39.76 \quad \frac{g}{s}
\end{aligned}
$$

Technische Arbeit (1 1/2 Punkt).
1. Hauptsatz stationäre adiabate offene Prozesse am Verdichter liefert:

$$
\dot{W}_t = - \sum_k \dot{m}_k \cdot h_k
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{W}_t &= \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) \\
\dot{W}_t &= 0.03976 \cdot (36214) \\
\dot{W}_t &= 1439.869 \quad W \approx 1.44 \quad kW
\end{aligned}
$$

Lösung: Hauptsätze *Anwendung der Hauptsätze* ? von 50 Punkten

a) Skizze

b) Der von außen einfallende Wärmestrom $\dot{Q}_{Last}$ muss von der Klimaanlage als Kälteleistung abgeführt werden, also:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_0 &= \dot{Q}_{Last} = kA(T_{Umg} - T_{Innen}) \\ &= 0,7\frac{W}{m^2K} \cdot 30m^2 \cdot (303,15K - 255,15K) \\ &= 1008W \end{aligned} \tag{17}$$

Legt man das Kontrollvolumen in dem unter a) skizzierten System um die Kältemaschine, so vereinfacht sich der 1. Hauptsatz der Thermodynamik zu:

$$0 = +|\dot{Q}_0| - |\dot{Q}_{Umg}| + |\dot{W}_t|, \tag{18}$$

wobei die Vorzeichen die Richtungen der Energieströme in bzw. aus der Kältemaschine angeben. Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik vereinfacht sich bei dieser Problemstellung zu:

$$0 = \frac{|\dot{Q}_0|}{T_{Innen}} - \frac{|\dot{Q}_{Umg}|}{T_{Umg}} + 0. \tag{19}$$

Algebraische Umformung des 2. Hauptsatzes führt zu:

$$|\dot{Q}_{Umg}| = |\dot{Q}_0|\frac{T_{Umg}}{T_{Innen}}. \tag{20}$$

Eingesetzt in den ersten Hauptsatz verbleibt nur noch die unbekannte Antriebsleistung $\dot{W}_t$:

$$\begin{aligned} 0 &= |\dot{Q}_0| - |\dot{Q}_0|\frac{T_{Umg}}{T_{Innen}} + |\dot{W}_t| \\ |\dot{W}_t| &= |\dot{Q}_0|\frac{T_{Umg}}{T_{Innen}} - |\dot{Q}_0| \\ \dot{W}_t &= kA(T_{Umg} - T_{Innen})\frac{T_{Umg}}{T_{Innen}} - kA(T_{Umg} - T_{Innen}) \\ \dot{W}_t &= kA(T_{Umg} - T_{Innen})\left(\frac{T_{Umg}}{T_{Innen}} - 1\right) \\ \dot{W}_t &= 1008W \cdot \left(\frac{303,15K}{255,15K} - 1\right) \\ \underline{\underline{\dot{W}_t}} &= \underline{\underline{189,63W}} \end{aligned}$$

Die Antriebsleistung erscheint ziemlich gering, man muss hierbei allerdings berücksichtigen, dass der Wärmeeinfall durch Strahlung vernachlässigt worden ist, welcher auch noch einen beträchtlichen Anteil der Kühllast aufweisen würde. Der Vollständigkeit halber lässt sich der an die Umgebung abgeführte Wärmestrom $\dot{Q}_{Umg}$ berechnen zu:

$$|\dot{Q}_{Umg}| = +|\dot{Q}_0| + |\dot{W}_t| = 1197,63W \tag{21}$$

Lösung auch über den Carnotwirkungsgrad berechenbar.
c) In diesem Fall liegt eine instationäre Aufwärmung des Kühlraums vor. Der einzige die Systemgrenze *Klimakammer* überschreitende Energiestrom ist die von außen einfallende Wärmelast, die eine Funktion der Innentemperatur ist:

$$\dot{Q}_{Last} = \dot{Q}_{Last}(T_{Innen}) \neq konst. \tag{22}$$

Der 1. Hauptsatz vereinfacht sich folgendermaßen:

$$\frac{dU}{dt} = +|\dot{Q}_{Last}| \tag{23}$$

Die Klimabox ist räumlich abgeschlossen mit einem konstanten Volumen. Die Zustandsänderung bei der Erwärmung des Innenraums erfolgt demnach isochor. Es gilt somit:

$$c_v = \left(\frac{du}{dT}\right) \Leftrightarrow m \cdot c_v = \left(\frac{dU}{dT}\right) \Leftrightarrow dU = m \cdot c_v \cdot dT \tag{24}$$

Die Gleichungen 22 und 24 in Gleichung 23 eingesetzt ergibt folgende Differentialgleichung mit der Laufvariablen $T = T_{Innen}$:

$$\frac{m \cdot c_v \cdot dT}{dt} = kA(T_{Umg} - T) \tag{25}$$

Nach Trennung der Veränderlichen folgt:

$$\frac{dT}{T - T_{Umg}} = -\frac{kA}{m \cdot c_v} \cdot dt \tag{26}$$

Die Integration von T_0 bis T bzw. t_0 bis t

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_{Umg}} = -\frac{kA}{m \cdot c_v} \cdot \int_{t_0}^{t} dt \tag{27}$$

liefert:

$$\ln\left(\frac{T - T_{Umg}}{T_0 - T_{Umg}}\right) = -\frac{kA}{m \cdot c_v} \cdot (t - t_0) \tag{28}$$

Die Aufwärmung der Klimakammer erfolgt Zeitinvariant, wodurch t_0 zu Null gesetzt werden kann. Löst man die Gleichung nach der Zeit t auf, erhält man:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{m \cdot c_v}{kA} \ln\left(\frac{T - T_{Umg}}{T_0 - T_{Umg}}\right) \\ &= -\frac{18kg \cdot 0,717\frac{kJ}{kg\ K}}{0,7\frac{W}{m^2K} \cdot 30m^2} \ln\left(\frac{255,15 - 303,15K}{251,15 - 303,15K}\right) \\ &= \underline{\underline{49,23sek}} \end{aligned} \tag{29}$$

d) Da die Umgebungstemperatur niedriger ist als die Kühlraumtemperatur verlässt der Wärmestrom $\dot{Q}_{Last}$ den Kühlraum als Wärmelast. Die Wärmepumpe muss diesen Wärmeverlust durch Zuheizung kompensieren.

$$\dot{Q}_{Heiz} = \dot{Q}_{Last} = kA(T_{Innen} - T_{Umg}) \tag{30}$$

Betrachtet man das System Wärmepumpe, so vereinfacht sich der 1. Hauptsatz bei Beachtung der Vorzeichen je nach Energiestromrichtung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 0 &= -|\dot{Q}_{Heiz}| + |\dot{Q}_{Umg}| + |\dot{W}_t| \\ \Leftrightarrow |\dot{Q}_{Heiz}| &= |\dot{Q}_{Umg}| + |\dot{W}_t| = kA(T_{Innen} - T_{Umg}) \end{aligned} \tag{31}$$

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik vereinfacht sich analog zu b) zu:

$$0 = \frac{|\dot{Q}_{Heiz}|}{T_{Innen}} - \frac{|\dot{Q}_{Umg}|}{T_{Umg}} + 0. \tag{32}$$

Algebraische Umformung des 2. Hauptsatzes führt zu:

$$|\dot{Q}_{Umg}| = |\dot{Q}_{Heiz}| \frac{T_{Umg}}{T_{Innen}}. \tag{33}$$

Nach einsetzen des 2. Hauptsatzes in den 1. erhält man:

$$\dot{W}_t = kA(T_{Innen} - T_{Umg}) \left(1 - \frac{T_{Umg}}{T_{Innen}}\right) \tag{34}$$

Algebraische Umformung liefert:

$$\begin{aligned} (T_{Innen} - T_{Umg})^2 &= \frac{\dot{W}_t}{kA} \cdot T_{Innen} \\ (T_{Innen} - T_{Umg}) &= \pm\sqrt{\frac{\dot{W}_t}{kA} \cdot T_{Innen}}, \end{aligned} \tag{35}$$

und als einzig sinnvolle Lösung:

$$\begin{aligned} T_{Umg} &= T_{Innen} - \sqrt{\frac{\dot{W}_t}{kA} \cdot T_{Innen}} \\ T_{Umg} &= 225,30K \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{\vartheta_{Umg}}} &= \underline{\underline{-47,85^\circ C}} \end{aligned}$$