Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

7. August 2009

Klausur zur Vorlesung

Thermodynamik

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- bzw Gedankengang muss erkennbar sein!
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
Verwenden Sie ausschließlich die im Skript/Buch angegebenen Dampftafeln.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Exergie eines idealen Gases* 12 von 50 Punkten

Kurzfrage: Ist die theoretische Arbeitsfähigkeit einer Dose Cola, die eine Temperatur von 5°C und einen Druck von 1,1 bar bar hat in einer Umgebung mit 20°C und 1 bar positiv oder negativ. (Kann die Cola Arbeit leisten während sie auf Umgebungszustand gebracht wird oder muss Arbeit an der Cola geleistet werden?)

Luft, ein ideales Gas, mit der Masse $m_L = 5\,kg$ liegt im Zustand 1 bei $p_1 = 2\,bar$ und $T_1 = 400\,K$ vor. Es soll auf den Zustand 2 ($p_2 = 1{,}5\,bar$, $T_2 = 300\,K$) gebracht werden. die Umgebung hat eine Temperatur von $t_U = 10°C$ und einen Druck von $p_U = 1{,}2\,bar$.

a) Wie groß ist das Volumenverhältnis $\frac{V_1}{V_2}$?

b) Zeichnen Sie in ein p-V-Diagramm die Prozessschritte von Zustand 1 zu Zustand 2 ein, die einen maximalen Arbeitsgewinn ermöglichen. Kennzeichnen Sie darin die Volumenänderungsarbeit, die an der Luft geleistet wird ebenso wie die, die von der Luft geleistet wird.

c) Wie groß ist die Exergie des Systems im Zustand 1? Wie groß im Zustand 2?

d) Wie viel Arbeit kann 1 kg der Luft maximal leisten, während es von Zustand 1 zu Zustand 2 gebracht wird?

e) Wie viel Volumenänderungsarbeit wir pro kg der Luft an der Umgebung geleistet? (Während des Prozesses von Zustand 1 zu Zustand 2)

f) In welchen Prozessschritten wird bei einem optimal geführten Prozess (Zustand 1 → Zustand 2) Entropie mit der Umgebung ausgetauscht?

Lösung:

KF: Die Dose kann Arbeit leisten. Jeder Körper, der nicht im Gleichgewicht mit der Umgebung ist, kann Arbeit leisten. ($\sum_{Punkte} = 1$)

a) Unter Beachtung der thermischen Zustandsgleichugn für ideale Gase ergibt sich:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1,5\,bar \cdot 400\,K}{2,0\,bar \cdot 300\,K} = 1$$

($\sum_{Punkte} = 1$)

b) adiabat/isentrop von Zustand 1 bis T_U, dann isotherm, dann adiabat/isentrop bis T_2. Dabei darauf achten, dass Zustand 2 das gleiche Volumen wie Zustand 1 hat.
($\sum_{Punkte} = 2$)

c) Exergie des Zustands 1:

$$-W_{ex} = U_1 - U_U + p_U(V_1 - V_U) - T_U(S1 - S_U)$$

(gilt analog auch für Zustand 2)

$$U_1 - U_U = mc_v(T_1 - T_U) = 419{,}5kJ$$

(Zustand 2: $60,49kJ$)

$V_1 - V_U$ kann aus der therm. Zustgl. f. ideale Gase bestimmt werden

$$S_1 - S_U = mc_p ln(\frac{T_1}{T_U}) - mR_i ln(\frac{p}{p_U}) = 1002,88\frac{J}{K}$$

(Zustand 2: $-29,8\frac{J}{K}$)

$$-W_{ex} = 73738J(Zustand2 : 7143J)$$

($\sum_{Punkte} = 5$)

d)

$$\frac{W_{ex,1} - W_{ex,2}}{5kg} = 13328,99J$$

($\sum_{Punkte} = 1$)

e) Da $V_1 = V_2$ wird keine Volumenänderungsarbeit an der Umgebung geleistet
($\sum_{Punkte} = 1$)

f) Im isothermen Schritt. (Die anderen Schritte sind ja ADIABAT)
($\sum_{Punkte} = 1$)

Aufgabe 2: *Wärmetransformator* 12 von 50 Punkten

Kurzfrage: Warum ist jede Wärmezufuhr zu einem System in realen Prozessen immer irreversibel?

Ein Wärmetransformator ist eine Maschine, der ein Wärmestrom $\dot{Q}_m$ auf mittlerem Temperaturniveau zugeführt wird und die einen Teil dieses Wärmestroms, $\dot{Q}_h$, ohne Zufuhr von technischer Arbeit auf ein höheres Temperaturniveau fördert. Der verbleibende Teil des Wärmestroms, $\dot{Q}_{ab}$, wird auf einem niedrigeren Temperaturniveau, meist dem Umgebungstemperaturniveau, abgegeben.

Der Wärmetransformator, der in dieser Aufgabe untersucht werden soll, arbeitet als solcher reversibel. Er bekommt in einem Wärmeübertrager von dem Wassermassenstrom $\dot{m}_W$ den benötigten Wärmestrom $\dot{Q}_m$ bei der konstanten Wärmetransformator-Temperatur T_m zugeführt. Das Wasser hingegen ändert seine Temperatur: Es tritt in den Wärmeübertrager mit einer Eintrittstemperatur von $t_{W,ein} = 50°C$ ein und tritt mit einer niedrigeren Temperatur wieder aus, da ihm der Wärmestrom $\dot{Q}_m$ entzogen wird.

Der Wärmetransformator gibt den Wärmestrom $\dot{Q}_h$ bei einer konstanten Wärmetransformator-Temperatur $t_h = 400°C$ mittels eines Wärmeübertragers an einen Luftstrom, der seine Temperatur infolge der Wärmezufuhr verändert, ab. Der Abwärmestrom $\dot{Q}_{ab}$ wird auf Umgebungstemperaturniveau $t_U = 10°C$ der Umgebung zugeführt.

Folgende Größen sind weiterhin bekannt: Der Luftmassenstrom $\dot{m}_L$ ist doppelt so groß wie der Wassermassenstrom $\dot{m}_W$. Der Luftstrom tritt mit einer Eintrittstemperatur von $t_{L,ein} = 200°C$ in den Wärmeübertrager ein, wo ihm der Wärmestrom $\dot{Q}_h$ zugeführt wird.

a) Zeichnen Sie ein Schaubild, das Wasserstrom, Luftstrom, Wärmetransformator und alle Wärmeströme enthält.

b) Wieviel Wärme kann einem kg Wasser des Wasserstroms maximal entzogen und dem Wärmetransformator zugeführt werden in Abhängigkeit von T_m? Wie groß ist die Exergie dieser Wärme bei einer Temperatur von T_m? Wie muss T_m gewählt werden, damit der Exergiestrom, der dem Wärmetransformator zugeführt wird, maximal wird?

Hinweis: Gehen Sie ab hier von $t_m = 30°C$ aus.

c) Bestimmen Sie die maximalen Wärmeströme $\dot{Q}_m$ und $\dot{Q}_h$ jeweils in Abhängigkeit von $\dot{m}_W$.

d) Bestimmen Sie die Luftaustrittstemperatur $T_{L,aus}$.

Lösung:

KF: Jede reale Wärmezufuhr funktioniert nur aufgrund einer Temperaturdifferenz. Ein Wärmestrom über eine Temperaturdifferenz erzeugt aber Entropie. Also ist jede reale Wärmezufuhr irreversibel.
($\sum_{Punkte} = 1$)

a) Wasserstrom gibt Q_m an den WT ab. Der WT gibt den Wärmestrom Q_h an den Luftstrom ab und den Wärmestrom Q_ab an die Umgebung. Weiterhin könnten die bekannten Temperaturen (Eintrittstemperaturen Luft und Wasser sowie Umgebungstemperatur) angegeben werden.
($\sum_{Punkte} = 2$)

b) Einem Kilogramm Wasser kann $Q_m = c_{H_2O}(50°C - t_m)$ entzogen werden.

$$c_{H_2O} = 4,182 \frac{kJ}{kg\,K} \qquad m_{H_2O} = 1kg$$

Die Exergie dieser Wärme ist:

$$W_{ex} = Q_m \frac{T_m - T_u}{T_m} = Q_m \cdot (1 - \frac{T_u}{T_m})$$

Die Exergie, die (pro Kilogramm Wasser, das mit T_w eintritt) an den WT abgegeben werden kann ist also

$$w_{ex} = c_{H_2O}(T_w - T_m)\tfrac{T_m - T_u}{T_m}$$
$$w_{ex} = c_{H_2O}(T_w - \tfrac{T_w T_u}{T_m} - T_m - T_u)$$

Das Maximum dieser Funktion ist gesucht. Also wird sie abgeleitet und danach muss die Nullstelle gefunden werden.

$$\tfrac{T_w T_u}{T_m^2} - 1 = 0$$
$$T_m = \sqrt{T_w T_u}$$

($\sum_{Punkte} = 4$)

c)

$$\dot{Q}_m = \dot{m}_w c_{H_2O} \cdot 20\,K$$
$$\dot{Q}_m = \dot{Q}_h + \dot{Q}_{ab} (1.HS)$$
$$\tfrac{\dot{Q}_m}{T_m} = \tfrac{\dot{Q}_h}{T_h} + \tfrac{\dot{Q}_{ab}}{T_{ab}} (2.HS - reversibel)$$

2 Gleichungen und 2 Unbekannte ($\dot{Q}_h$ und $\dot{Q}_{ab}$) liefern nun das Ergebnis:
(Alternativ hätte das folgendes Ergebnis auch über eine Exergiebilanz gefunden werden können.)

$$\dot{Q}_h = 0,1665 \cdot \dot{m}_w c_{H_2O} \cdot 20\,K$$

($\sum_{Punkte} = 2,5$)

d)

$$\dot{m}_L c_{p,Luft}(t_{L,aus} - t_{L,ein}) = \dot{Q}_h (1.HS)$$

$$\dot{Q}_h = 0,1665 \cdot \dot{m}_w c_{H_2O} \cdot 20\,K$$
$$\dot{m}_L = 2 \cdot \dot{m}_w$$

ergibt sich daraus:

$$2 \cdot \dot{m}_w c_{p,Luft}(t_{L,aus} - t_{L,ein}) = 0,1665 \cdot \dot{m}_w c_{H_2O} \cdot 20\,K$$

Da $t_{L,ein} = 200°C$ bekannt ist ergibt sich unter Berücksichtigung von $c_{p,Luft} = 1,006 \frac{kJ}{kg\,K}$:

$$t_{L,aus} = 200°C + \frac{0,1665}{2} \cdot \frac{4,182 \frac{kJ}{kg\,K}}{1,006 \frac{kJ}{kg\,K}} \cdot 20\,K = 206,92°C$$

($\sum_{Punkte} = 2,5$)

Aufgabe 3: *Kreisprozess* 14 von 50 Punkten

Kurzfrage: „isentrop“, „$\dot{s}_{prod} = 0$“ und „reversibel“: Welche dieser drei Aussagen haben die gleiche Bedeutung? Erklären Sie knapp, warum die dritte einen anderen Sachverhalt beschreibt.

In einem Kreisprozess mit einem umlaufenden Massestrom vom $\dot{m} = 0{,}5\,\frac{kg}{s}$ des Arbeitsmediums Propan werden folgende Schritte durchlaufen:

1-2 Isobare Wärmeabfuhr bis zu einem Dampfgehalt von $x = 0{,}1$.

2-3 Ideale Drosselung

3-4 Isobare Wärmezufuhr bis das Arbeitsmedium bei einer Temperatur von $T_4 = 11,7°C$ vorliegt. Dabei ist es um $10\,K$ überhitzt.

4-1 Kompression auf 20 bar (Verdichterwirkungsgrad $\eta_{SV} = 0{,}90$)

Stoffwerte für *Propan* (gasförmig)

spezifische Enthalpie $[kJ/kg]$ in Abhängigkeit von Druck und Temperatur:

	$274{,}9\,K$	$284{,}9\,K$	$344{,}8\,K$	$351{,}1\,K$
$3{,}6\,bar$	582,6	599,6	708,1	720,3
$5{,}0\,bar$	576,8	594,4	705,0	717,3
$6{,}7\,bar$	-	587,5	701,1	713,6
$20\,bar$	-	-	662,4	678,0

spezifische Entropie $[kJ/kg\,K]$ in Abhängigkeit von Druck und Temperatur:

	$274{,}9\,K$	$284{,}9\,K$	$344{,}8\,K$	$351{,}1\,K$
$3{,}6\,bar$	2,4478	2,5085	2,8535	2,8884
$5{,}0\,bar$	2,3705	2,4334	2,7853	2,8206
$6{,}7\,bar$	-	2,3611	2,7227	2,7585
$20\,bar$	-	-	2,4334	2,4769

Stoffwerte für *Propan* (Naßdampfgebiet)

p [bar]	T[K]	h' [kJ/kg]	h" [kJ/kg]	s' [kJ/kgK]	s" [kJ/kgK]
2,0	247,7	138,54	545,75	0,7659	2,4099
3,6	264,2	178,44	565,09	0,9206	2,3829
5,0	274,9	204,33	576,77	1,0156	2,3705
6,7	284,9	229,87	587,49	1,1057	2,3611
12,3	308,6	294,02	610,37	1,3181	2,3433
20,0	330,4	359,36	626,02	1,5172	2,3243
25,0	341,4	395,71	630,11	1,6219	2,3085

Lösen Sie folgende Aufgaben, die sich auf den oben beschriebenen Kreisprozess (vorangegangene Seite) beziehen:

a) Zeichnen Sie den Prozess in ein T-s Diagramm ein!

b) Handelt es sich bei dem oben beschrieben Prozess um einen Wärmekraftprozess? Begründen Sie Ihre Antwort knapp.

c) Bestimmen Sie für alle vier Eckpunkte die Temperatur und den Druck, sowie für Punkt 3 und 4 den Dampfgehalt x sofern diese Punkte im Naßdampfgebiet liegen.

d) Wie groß ist die Leistung, die der Verdichter aufnehmen muss? Wie groß ist der vom Prozess aufgenommene Wärmestrom? Wie groß der abgegebene?

Lösung:

KF: Reversibel hat die gleiche Bedeutung wie $s_{prod} = 0$. isentrop hingegen bedeutet, dass die Entropie eines Systems konstant bleibt. Es kann aber sehr wohl Entropie produziert werden ($s_{prod} > 0$) solange diese über einen Wärmestrom abgeführt wird.
($\sum_{Punkte} = 1$)

a) Zeichnung: TS Diagramm mit ND-Gebiet.
($\sum_{Punkte} = 2,5$)

b) Nein. Es ist ein linksdrehener Prozess, also ein Kälte- oder WP-Prozess.
($\sum_{Punkte} = 1$)

c) Beginne mit Punkt 4 und 3: $T_4 = 11,7°C$ ist 10°C überhitzt, d.h., $T_s = 1,7°C = 274,9\,K$. Der damit korrespondierende Sättigungsdruck $p_4 = p_3$ ist 5 bar. Da Punkt 3 im ND Gebiet liegt ist seine Temperatur $T_3 = T_s = 1,7°C$

Nun soll Zustand 1 gefunden werden:

h_4 aus Stoffdten (gasförmig) bei 5 bar und 11,7°C: $594,4\frac{kJ}{kg}$.

Über die Beziehung für den Isentropenwirkungsgrad η_{sv} für Verdichter und über das Wissen, dass $T_1^* = 344,8\,K$ über $s_4 = s_1^*$ gefunden werden kann und sich daraus auch $h_1^* = 662,4\frac{kJ}{kg}$ bestimmen lässt, kann schließlich $h_1 = 670\frac{kJ}{kg}$ bestimmt werden.

Hieraus lässt sich nun auch T_1 berechnen (Interpolation aus Stoffdaten (gasförmig)):

$$T_1 = \frac{(351,1K - 344,8K)}{(678\frac{kJ}{kg} - 622\frac{kJ}{kg})} \cdot (670\frac{kJ}{kg} - 622,4\frac{kJ}{kg}) + 344,8 = 347,9\,K$$

Nun Punkt 2: Druck $p_2 = p_1 = 20bar$. Und die Temperatur ist, da wir uns im ND befinden $T_2 = T_s(20bar) = 330,4\,K$

Nun muss nur noch x_3 bestimmt werden. Aufgrund der idealen Drosselung gilt: $h_3 = h2$. Also muss nun h_2 bestimmt werden:

$$h_2 = 0{,}1 \cdot 626,02\frac{kJ}{kg} + (1 - 0{,}1) \cdot 359,36\frac{kJ}{kg} = 386,03\frac{kJ}{kg} = h_3$$

Das gesuchte x_3 ergibt sich zu $x_3 = \frac{h_3 - h'}{h'' - h'} = 0,49$
($\sum_{Punkte} = 7,5$)

d)

$$\begin{aligned} \dot{W}_{t,41} &= \dot{m}(h_1 - h_4) = 37,8\,kW \\ \dot{Q}_{ab} &= \dot{m}(h_2 - h_1) = -141,99\,kW \\ \dot{Q}_{zu} &= -\dot{W}_{t,41} - \dot{Q}_{ab} = 104,19\,kW \end{aligned}$$

($\sum_{Punkte} = 2$)

Aufgabe 4: *Isentropen und Polytropen* 12 von 50 Punkten

Kurzfrage: Welchen Wert nimmt der Polytropenexponent n eines idealen Gases für eine isotherme Zustandsänderung an? Welchen für eine isochore Zustandsänderung?

a) Zeigen Sie, ohne bereits bekannte Werte für c_p und c_v zu verwenden, dass der Isentropenexponent von Luft bei Raumtemperatur $\kappa \approx 1,4$ ist.

b) Zwei Systeme (System A und System B) bestehen jeweils aus der gleichen Masse Luft. Beide haben zu Beginn die gleiche Temperatur ($T_1 = 20°C$) und den gleichen Druck ($p_1 = 1\,bar$). Beide Systeme werden so verdichtet, dass die spezifischen Volumina $v_{A,2}$ und $v_{B,2}$ beider Systeme nach der Verdichtung ebenfalls gleich sind. Bei System A erfolgt die Verdichtung allerdings adiabat isentrop, während sie bei System B polytrop mit einem Polytropenexponent $n = 1,2$ durchgeführt wird. Zeigen Sie, in welchem System die Endtemperatur T_2 höher ist.

c) In welchem der beiden unter b) beschriebenen Fälle wird mehr Wärme mit der Umgebung ausgetauscht?

Lösung: KF: Isotherm für ideales Gas: Vergleich $pv^n = konst$ (polytrop) und $pv = RT$ (ideales Gas). Wenn T konstant ist (isotherm), muss n=1 sein, damit beide Gleichungen erfüllt sind.

Damit bei isochoren Bedingungen $pv^n = konst$ gilt, muss $n \to \infty$ gelten.
($\sum_{Punkte} = 1$)

a)

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$
$$c_v = 5/2R$$
$$\text{(3 transl. Freiheitsgrade + 2 rot Freiheitsgrade)}$$
$$c_p = c_v + R = 7/2R$$
$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5} = 1,4$$

($\sum_{Punkte} = 5$)

b) adiabat/isentrop: $\frac{T_2}{T_1} = (\frac{v_1}{v_2})^{(\kappa-1)}$

Daraus folgt:

$$T_{2,isen} = \frac{T_1}{(\frac{v_2}{v_1})^{\kappa-1}}$$

polytrop:$\frac{T_2}{T_1} = (\frac{v_1}{v_2})^{(n-1)}$

Daraus folgt:

$$T_{2,poly} = \frac{T_1}{(\frac{v_2}{v_1})^{n-1}}$$

$\frac{v_2}{v_1}$ in beiden Fällen gleicher Wert, der kleiner als eins ist (Verdichtung). T_1 ist ebenfalls in beiden Fällen gleich.
$\kappa = 1,4$ ist jedoch größer als $n = 1,2$
Also ist $(\frac{v_2}{v_1})^{n-1}$ größer als $(\frac{v_2}{v_1})^{\kappa-1}$.
Also ist $T_{2,isen}$ größer als $T_{2,poly}$
($\sum_{Punkte} = 5$)

c) Beim adiabaten Fall wir keine Wärme ausgetauscht (adiabat!). Also muss bei dem polytropen Fall mehr Wärme ausgetauscht werden.
($\sum_{Punkte} = 1$)