

Aufgabensammlung

Thermodynamik

Übung 1

Aufgabe 2.6: *Zustandsgrößen, Systeme und Hauptsätze*

- a) Was ist der Unterschied zwischen einer **intensiven** und einer **extensiven** Zustandsgröße?
- b) G sei eine Zustandsgröße mit der Einheit $[G] = J$. Welche Einheiten haben dann die Größen g , G_m und \dot{G} ?
- c) Was ist der Unterschied zwischen einem **abgeschlossenen**, **geschlossenen** und **offenen** System?
- d) Wodurch ist ein **adiabates** System gekennzeichnet?
- e) Worin liegt der Unterschied zwischen einer **Zustandsgröße** und einer **Prozessgröße**?
- f) Welches sind die vier Hauptsätze der Thermodynamik und was sagen sie aus?
- g) Welche drei Zustandsgrößen werden im Zusammenhang mit den Hauptsätzen eingeführt und wie sind sie genau definiert?

Aufgabe 2.7: *Entropieänderung beim Schmelzen von Eis und Erwärmen von Wasser*

Das Schmelzen von 1 kg Eis erfordert eine Wärmezufuhr 333,3 kJ. Das Erwärmen von 1 kg Wasser um 1 K erfordert 4180 J, d.h. $c_{H_2O} = 4180 \frac{J}{kg \cdot K}$.

Ein 5 kg schwerer Eisblock der Temperatur 0°C habe die Entropie $S = 0 \frac{J}{K}$. Er wird durch reversible Wärmezufuhr geschmolzen, ohne dass sich seine Temperatur ändert.

- Welche Entropie wird dem Eisblock beim Schmelzen zugeführt? Anschließend wird das Wasser auf 10°C erwärmt, wobei die Wärmezufuhr wiederum reversibel ablaufen soll.
- Welche Entropie wird dem Wasser dabei insgesamt (beim Schmelzen und Erwärmen) zugeführt?

Lösung: *Entropieänderung beim Schmelzen von Eis und Erwärmen von Wasser*

- Während des Schmelzvorgangs bleibt die Temperatur des Eisblocks konstant bei $T = 273,15 K$. Die Entropieänderung berechnet sich zu

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Big|_{rev} \Rightarrow S_1 - \underbrace{S_0}_{=0} = \frac{5 \text{ kg} \cdot 333,3 \frac{kJ}{kg}}{273,15 K} = 6,101 \frac{kJ}{K}$$

Anmerkung: Die Entropieänderung des Eisblocks ist damit auch für den Fall berechnet, dass die Wärmezufuhr nicht reversibel erfolgt (dieser Fall gilt übrigens immer). In diesem Fall erfolgt die Wärmezufuhr bei einer höheren Temperatur als 273,15 K und enthält folglich einen kleineren Entropiestrom. Der Wärmestrom folgt einem Temperaturgradienten und vermehrt dabei die ihm zugeordnete Entropie, die dann schließlich die 6,101 $\frac{kJ}{K}$ erreicht. Die Entropie des geschmolzenen Wassers hängt nicht davon ab, wie der Schmelzvorgang erfolgte, denn die Entropie ist eine Zustands- und keine Prozessgröße.

- Die Erwärmung des Wassers ist ein komplizierterer Fall der Entropieberechnung, weil sich - anders als beim Phasenwechsel - die Temperatur während der Wärmezufuhr ändert. Es gilt:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\delta Q}{T} = \frac{m \cdot c_{H_2O} \cdot dT}{T} \\ \int_1^2 dS &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{m \cdot c_{H_2O}}{T} dT = m \cdot c_{H_2O} \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT \\ S_2 - S_1 &= m \cdot c_{H_2O} [\ln T]_{T_1}^{T_2} = m \cdot c_{H_2O} [\ln T_2 - \ln T_1] \\ S_2 &= S_1 + m \cdot c_{H_2O} \ln \frac{T_2}{T_1} = \\ 6,101 \frac{kJ}{K} + 5 \text{ kg} \cdot 4180 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot \ln \frac{283,15 K}{273,15 K} &= 6,852 \frac{kJ}{K} \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis ist unabhängig von der Art der Prozessführung. Die Entropie des erwärmten Wassers hängt nur von den Zustandsgrößen des Wassers ab und nicht davon, wie es zu dieser Situation kam.

Aufgabe 2.8: *Grundbegriffe der Thermodynamik*

Erläutern Sie die folgenden Grundbegriffe der Thermodynamik:

- a) Extensive und intensive Zustandsgrößen,
- b) molare und spezifische Zustandsgrößen,
- c) thermodynamisches System,
- d) adiabat; isobar, isotherm und isochor sowie
- e) Prozessgrößen.

Erläutern Sie die wesentlichen Aussagen der Hauptsätze der Thermodynamik.

Lösung: *Grundbegriffe der Thermodynamik*

- a) - e) Vgl. Skriptum zur Vorlesung

Nullter Hauptsatz führt Temperatur axiomatisch ein.

$$\frac{T}{K} = \frac{t}{^{\circ}C} + 273,15$$

Erster Hauptsatz führt Energie axiomatisch ein. Energie ist eine extensive Zustandsgröße, sie ist für ein abgeschlossenes System konstant, Wärme ist eine Energieform (keine Zustandsgröße!).

Energieanteile:

- kinetische Energie E_{kin}
- potentielle Energie E_{pot}
- innere Energie U

Gesamtenergie $E = E_{kin} + E_{pot} + U$

Zweiter Hauptsatz führt Entropie axiomatisch ein. Extensive Zustandsgröße, die in einem abgeschlossenen System konstant bleibt oder zunimmt (durch Irreversibilitäten).

$$dS_{system} = dS_a + dS_i$$

$$\text{mit } dS_a = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \text{ und } dS_i = \frac{\delta \Psi}{T} = dS_{prod}$$

$$\text{Häufig auch } \dot{S} = \dot{S}_a + \dot{S}_i = \frac{\dot{Q}_{rev}}{T} + \frac{\dot{\Psi}}{T}$$

mit \dot{S}_a Entropieströmung und \dot{S}_i Entropieerzeugung

$\dot{S}_a > 0$ positiv: Wärmezufuhr

$\dot{S}_a = 0$ null: adiabate Systeme (ohne Wärmeaustausch)

$\dot{S}_a < 0$ negativ: Wärmeabfuhr

$\dot{S}_i > 0$ positiv: irreversible Prozesse (nicht umkehrbar)

$\dot{S}_i = 0$ null: reversible Prozesse (umkehrbar)

Dritter Hauptsatz legt Nullpunkt der Entropie am absoluten Nullpunkt der Temperatur fest: $s^{abs}(T \rightarrow 0K, p) = 0$.

Aufgabe 3.1: *Innere Energie einer Luftsäule*

- a) Bestimmen Sie die gesamte innere Energie einer Luftsäule über einer quadratischen Meeresoberfläche $A = L^2 = 1 \text{ km}^2$. Die Luftsäule reicht vom Meeresspiegel bis zur Höhe z_1 . Die spezifische innere Energie $u_0 = 20 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ sei über das betrachtete Volumen konstant. Es gilt für die innere Energie $U(z_1)$ des Gesamtsystems:

$$U(z_1) = \int_V u_0 \varrho(z) dV \quad \text{mit} \quad \varrho(z) = \varrho_0 e^{-\frac{\varrho_0 g z}{p_0}}$$

Die Dichte in Meereshöhe beträgt $\varrho_0 = 1,203 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Der Druck in Meereshöhe beträgt $1,013 \text{ bar} = 101300 \text{ Pa} = 101300 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$.

- b) Welche innere Energie hat die Luftsäule, wenn über die gesamte Erdatmosphäre integriert wird, d.h. beim Grenzübergang $z_1 \rightarrow \infty$?

Lösung: *Innere Energie einer Luftsäule*

- a) Es wird ein Koordinatensystem eingeführt, dessen Ursprung in Höhe des Meeresspiegels auf einer Ecke der Grundfläche liegt, so dass die x - und die y -Koordinate jeweils von 0 bis $L = 1000 \text{ m}$ laufen. Die z -Koordinate gibt die Höhe über dem Meer an. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{V(z)} \varrho u_0 dV &= \int_0^L \int_0^L \int_0^{z_1} \varrho_0 e^{-\frac{\varrho_0 g z}{p_0}} u_0 dz dx dy = \\ &= \int_0^L \int_0^L u_0 \varrho_0 \left[-\frac{p_0}{\varrho_0 g} e^{-\frac{\varrho_0 g z}{p_0}} \right]_{z=0}^{z=z_1} dx dy = \frac{u_0 p_0}{g} \left(1 - e^{-\frac{\varrho_0 g z_1}{p_0}} \right) \int_0^L \int_0^L dx dy = \\ &= \frac{u_0 p_0}{g} \left(1 - e^{-\frac{\varrho_0 g z_1}{p_0}} \right) L \int_0^L dy = \frac{L^2 u_0 p_0}{g} \left(1 - e^{-\frac{\varrho_0 g z_1}{p_0}} \right) = \\ &= \frac{1\,000\,000 \text{ m}^2 \cdot 20 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \cdot 101300 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} \left(1 - e^{-\frac{1,203 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot z_1}{101300 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}} \right) = \\ &= 2,065 \cdot 10^{14} \text{ J} \left(1 - e^{-\frac{1,165 \cdot 10^{-4} \cdot z_1}{\text{m}}} \right) \end{aligned}$$

- b) Für $z \rightarrow \infty$ geht der Term $e^{-\frac{1,165 \cdot 10^{-4} \cdot z_1}{\text{m}}}$ gegen null. Folglich beträgt die innere Energie für diesen Grenzfall $2,065 \cdot 10^{14} \text{ J}$.

Aufgabe 3.3: *Bestimmung der Geschwindigkeit einer Luftgewehrkugel*

Ein Schütze will die Geschwindigkeit einer Luftgewehrkugel mit der Masse $m = 1,5\text{ g}$ bestimmen. Zu diesem Zweck schießt er horizontal auf einen ruhenden 50 g schweren Wachskörper, der an einem Pendel hängt. Das Pendel wird durch den Schuss so ausgelenkt, dass der Umkehrpunkt $1,4\text{ cm}$ höher liegt als der Ruhepunkt. Welche Geschwindigkeit hatte die Kugel beim Auftreffen auf den Wachskörper?

Lösung: *Bestimmung der Geschwindigkeit einer Luftgewehrkugel*

Wir betrachten die Zustände 1 (vor Eindringen der Kugel), 2 (nach Eindringen der Kugel) und 3 (Pendel am Umkehrpunkt). Die Geschwindigkeit des Pendels im Zustand 2 berechnet sich aus der Energieerhaltung:

$$\begin{aligned}E_{pot,3} &= E_{kin,2} \\mgz &= \frac{m}{2}c_2^2 \\c_2 &= \sqrt{2gz} = 0,524 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit der Kugel im Zustand 1 berechnet sich aus der Impulserhaltung:

$$\begin{aligned}(m_K + m_W)c_2 &= m_K c_1 \\c_1 &= \frac{(m_K + m_W)c_2}{m_K} = \frac{51,5\text{ g} \cdot 0,524 \frac{m}{s}}{1,5\text{ g}} = 17,99 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4: Kollision zweier Satelliten

Ein Satellit der Masse $m_1 = 1000 \text{ kg}$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $c_1 = 1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ in Richtung der x-Koordinate. Er kollidiert mit einem zweiten Satelliten, der sich vor dem Stoß mit der Geschwindigkeit $c_2 = 600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in Richtung der negativen x-Koordinate bewegt. Bei dieser Kollision entsteht ein Schrotthaufen, der sich mit der Geschwindigkeit $c_{\text{Schrott}} = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in die Richtung der positiven x-Koordinaten bewegt.

- Welche Masse hatte der zweite Satellit?
- Wieviel Energie wurde bei der Kollision in andere als kinetische Energieformen umgewandelt?
- Welche Energie wird umgewandelt und welche Schrottggeschwindigkeit wird erreicht, wenn der zweite Satellit sich mit derselben Geschwindigkeit wie in a) in Richtung der positiven x-Achse bewegt?

Lösung: Kollision zweier Satelliten

- Wir betrachten ein System, das beide Satelliten umfasst. Die Impulsbilanz für dieses System lautet dann, da von außen keine Kräfte angreifen:

$$\begin{aligned} m_1 c_1 + m_2 c_2 &= m_{\text{Schrott}} c_{\text{Schrott}} = (m_1 + m_2) c_{\text{Schrott}} \\ m_2 &= m_1 \frac{c_{\text{Schrott}} - c_1}{c_2 - c_{\text{Schrott}}} = 1000 \text{ kg} \cdot \frac{200 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1000 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-600 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1000 \text{ kg} \end{aligned}$$

- Aus dem Ersten Hauptsatz folgt:

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 + E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} &= 0 \\ U_2 - U_1 &= E_{\text{kin},1} - E_{\text{kin},2} = \frac{m_1 \cdot c_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot c_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) \cdot c_{\text{Schrott}}^2}{2} \\ &= 5 \cdot 10^8 \text{ J} + 1,8 \cdot 10^8 \text{ J} - 4 \cdot 10^7 \text{ J} = 6,4 \cdot 10^8 \text{ J} \end{aligned}$$

- Bei Bewegung der Satelliten in derselben Richtung gilt ebenfalls die Impulserhaltung wie in Teil a) :

$$\begin{aligned} m_1 c_1 + m_2 c_2 &= m_{\text{Schrott}} c_{\text{Schrott}} = (m_1 + m_2) c_{\text{Schrott}} \\ c_{\text{Schrott}} &= \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} = \frac{1,6 \cdot 10^6 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{2000 \text{ kg}} = 800 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Die Erhöhung der inneren Energie der Satelliten berechnet sich wie in Teil b):

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= E_{\text{kin},1} - E_{\text{kin},2} = \frac{m_1 \cdot c_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot c_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) \cdot c_{\text{Schrott}}^2}{2} \\ &= 5 \cdot 10^8 \text{ J} + 1,8 \cdot 10^8 \text{ J} - 6,4 \cdot 10^8 \text{ J} = 4 \cdot 10^7 \text{ J} \end{aligned}$$

Anmerkung: Bei realen Satellitenkollisionen bildet der Schrott natürlich keine einheitliche, beieinander bleibende Masse - sehr zum Leidwesen der Techniker, die immer mehr kleine Trümmerteile und damit steigende Kollisionsgefahren im erdnahen Weltraum registrieren.

Übung 2

Aufgabe 3.5: Leistung und kinetische Energie

Ein System ($m = 340\text{kg}$) bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $c_1 = 4,6\text{m/s}$. Von einem Zeitpunkt $t_1 = 0\text{s}$ an wird ihm eine Leistung $\dot{W}_t(t)$ zugeführt, deren Zeitfunktion

$$\dot{W}_t(t) = \dot{W}_{t0} + a_1(t - t_1) + a_2(t - t_1)^2$$

mit $\dot{W}_{t0} = 1\text{kW}$, $a_1 = 0,1\text{kW/s}$ und $a_2 = 0,006\text{kW/s}^2$ beträgt.

- Welche Leistung \dot{W}_t wird dem System zum Zeitpunkt t_2 nach $(t_2 - t_1) = 10\text{s}$ zugeführt?
- Welche technische Arbeit W_{t12} hat das System während des Zeitintervalls $(t_2 - t_1)$ aufgenommen?
- Welche Geschwindigkeit c_2 hat das System zum Zeitpunkt t_2 , wenn die zugeführte technische Arbeit W_{t12} allein zur Veränderung der kinetischen Energie des Systems führt?

Lösung: Leistung und kinetische Energie

- Einsetzen der gegebenen Daten in die Zeitfunktion liefert $\dot{W}_t(t_2) = 2,6\text{kW}$.
- Integration der Leistungszeitfunktion ergibt die technische Arbeit:

$$\begin{aligned} W_{t12} &= \int_{t_1}^{t_2} \dot{W}_t(t) dt \\ &= \dot{W}_{t0}(t_2 - t_1) + \frac{a_1}{2}(t_2 - t_1)^2 + \frac{a_2}{3}(t_2 - t_1)^3 = 17\text{kJ} \end{aligned}$$

- Die Gesamtenergiebilanz für instationäre Prozesse im offenen System (Erster Hauptsatz) lautet:

$$\frac{d}{dt} \left\{ U + m \left(\frac{c^2}{2} + gz \right) \right\} = \sum_k \left[\dot{m} \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right]_k + \dot{Q} + \dot{W}_t - p \frac{dV_{\text{System}}}{dt}$$

Die zugeführte technische Arbeit soll nur zur Veränderung des Bestands an kinetischer Energie führen, d.h. alle übrigen Terme verschwinden. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} W_{t12} &= \frac{m}{2}(c_2^2 - c_1^2) \quad \text{und} \\ c_2 &= \sqrt{\frac{2W_{t12}}{m} + c_1^2} = 11,01\text{m/s} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6: Anwendung der Gesamtenergiebilanz: Beschleunigung eines Fahrstuhls

Ein Fahrstuhl ($m = 1000kg$) in einem Hochhaus soll aus dem Ruhezustand ($c_1 = 0$) heraus mit konstanter Beschleunigung $b = g/5$ aufwärts bis zur Geschwindigkeit $c_2 = 10m/s$ beschleunigt werden.

- Welche Zeitfunktion $\dot{W}_t(t)$ muss die zugeführte Leistung haben, wenn die Bedingung konstanter Beschleunigung eingehalten werden soll?
- Nach welcher Zeit ($t_2 - t_1$) hat der Fahrstuhl die geforderte Geschwindigkeit c_2 erreicht?
- Welche Leistung \dot{W}_t muss dem Fahrstuhl zum Zeitpunkt t_2 zugeführt werden?
- Welche Höhe ($z_2 - z_1$) hat der Fahrstuhl zu diesem Zeitpunkt erreicht?
- Welche technische Arbeit W_{t12} ist dem Fahrstuhl im Zeitintervall ($t_2 - t_1$) zugeführt worden?
- Welche Höchstgeschwindigkeit c_{max} kann der Fahrstuhl mit der konstanten Leistung $\dot{W}_t = 120kW$ erreichen?

Hinweis: Erdbeschleunigung $g = 9,81m/s^2$.

Lösung: Anwendung der Gesamtenergiebilanz: Beschleunigung eines Fahrstuhls

- Die Gesamtenergiebilanz für instationäre Prozesse im offenen System (Erster Hauptsatz) lautet:

$$\frac{d}{dt} \left\{ U + m \left(\frac{c^2}{2} + gz \right) \right\} = \sum_k \left[\dot{m} \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right]_k + \dot{Q} + \dot{W}_t - p \frac{dV_{System}}{dt}$$

Die Leistung \dot{W}_t möge nur die kinetische und potentielle Energie des Systems Fahrstuhl ändern:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) &= \dot{W}_t \\ mc \frac{dc}{dt} + mg \frac{dz}{dt} &= \dot{W}_t \end{aligned}$$

Mit $b = \frac{dc}{dt} = \text{konstant}$ und $c = \frac{dz}{dt} = \int_{t_1}^t b dt + c(t_1)$ folgt:

$$\dot{W}_t = mb(b + g)(t - t_1)$$

-

$$c_2 = \int_{t_1}^{t_2} b dt + c(t_1) = b(t_2 - t_1) \Rightarrow (t_2 - t_1) = \frac{c_2}{b} = 5, 1s$$

- Die Zeitfunktion nach a) liefert $\dot{W}_t(t_2) = 117,79kW$.

d)

$$(z_2 - z_1) = \int_{t_1}^{t_2} c \, dt = \int_{t_1}^{t_2} b(t - t_1) \, dt = \frac{1}{2}b(t_2 - t_1)^2 = 25,48m$$

e)

$$W_{t12} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{W}_t \, dt = \frac{6}{25}mg^2 \int_{t_1}^{t_2} (t - t_1) \, dt = \frac{6}{25}mg^2 \frac{1}{2}(t_2 - t_1)^2 = 300kJ$$

f) Nach a) ergibt sich $\dot{W}_t = m(cb + gc) = mc(b + g)$. Daraus folgt mit $b = 0$ und $\dot{W}_t = \textit{konstant}$

$$c_{max} = \frac{\dot{W}_t}{mg} = 12,23m/s$$

Aufgabe 3.8: Warmwasserdusche

Aus einem See der Temperatur $t_S = 5^\circ C$ wird Wasser entnommen, um eine Warmwasserdusche zu betreiben. Das Wasser durchläuft eine Pumpe und einen Durchlauferhitzer. Beim Durchströmen des Rohres vom Durchlauferhitzer zum Duschkopf tritt ein Wärmeverlust von $2 \frac{J}{g}$ auf. Das Wasser verlässt den Duschkopf durch die Querschnittsfläche $A = 50 \text{ mm}^2$ mit einer Temperatur von $t_D = 35^\circ C$. Der Duschkopf befindet sich in einer Höhe von $z_D = 8,0 \text{ m}$ über dem Wasserspiegel des Sees.

Weitere Angaben: Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, Dichte von Wasser $\rho_{H_2O} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, spezifische Wärmekapazität von Wasser $c_{H_2O} = 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

Es soll verwendet werden: $u = c_{H_2O} t$ (d.h. es wird willkürlich festgelegt, dass Wasser bei $0^\circ C$ die innere Energie 0 hat.)

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit am Austritt c_{aus} erstens in Abhängigkeit vom Volumenstrom und zweitens konkret für den Fall, dass $10 \frac{\text{l}}{\text{min}}$ verbraucht werden.
- Zeichnen Sie eine Skizze des Aufbaus und tragen Sie den gewählten Kontrollraum und die Energieströme ein!
- Welche elektrische Leistung muss zur Verfügung stehen, damit die Dusche mit 12 l/min betrieben werden kann?
- Zum Betrieb der Dusche steht ein Netzanschluss mit der Spannung $U = 220 \text{ V}$ zur Verfügung, der mit 16 A abgesichert ist. Welcher Massenstrom kann maximal auf die erforderliche Duschwassertemperatur erwärmt werden, ohne die Sicherung zu überlasten?

Hinweis: Vernachlässigen Sie einen außerordentlich unbedeutenden, aber sehr kompliziert zu behandelnden Term.

- Um den Wasserstrom zu erhöhen, soll die Dusche an einem anderen Ort aufgestellt werden, und zwar derart, dass der Duschkopf 8 m *unter* dem Wasserspiegel des Sees liegt und so die Pumpe überflüssig wird. Welcher Duschwasserstrom steht dann zur Verfügung?

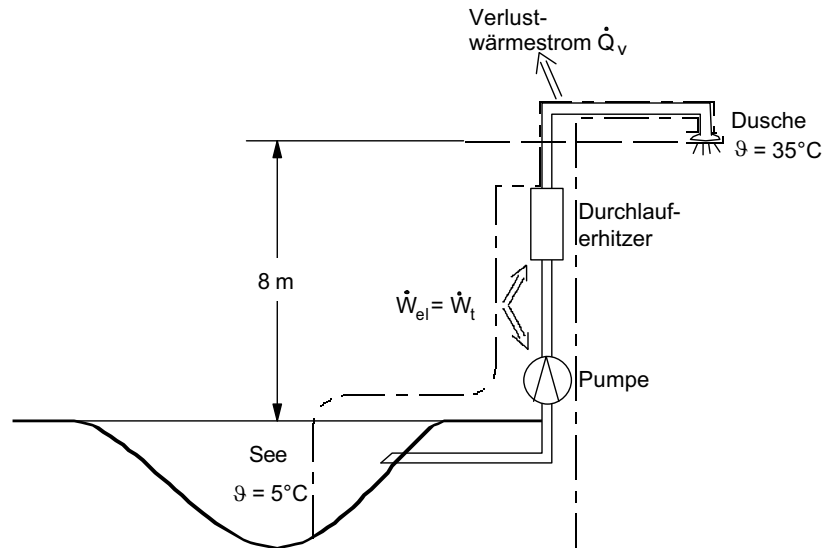
Lösung: Warmwasserdusche

a) $c_{aus} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{10 \frac{\text{l}}{\text{min}}}{50 \text{ mm}^2} = \frac{0,01 \text{ m}^3}{60 \text{ s} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 3,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) Schematische Skizze

- Die Energiebilanz wird für ein System formuliert, das die Leitungen, die Pumpe und den Durchlauferhitzer umfasst. Außerdem soll im Bereich des Sees die Systemgrenze so von der Einsaugöffnung entfernt sein, dass keine kinetische Energie am Einlauf berücksichtigt werden muss.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left\{ U + m \left(\frac{c^2}{2} + gz \right) \right\}}_{=0} = \sum_k \left[\dot{m} \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right]_k + \dot{Q} + \dot{W}_t - \underbrace{p \dot{V}_{System}}_{=0}$$



Die linke Seite dieser Gleichung ist null, da ein stationärer Betriebszustand vorliegt. Die rechte Seite enthält nur Terme, die als Faktor Δt enthalten. Dividiert man durch diesen Faktor und schreibt die Summe aus (zwei Summanden wegen ein- und ausströmendem Massenstrom), so erhält man:

$$0 = \dot{m}(u + pv + \frac{c^2}{2} + gz)_{See} - \dot{m}(u + pv + \frac{c^2}{2} + gz)_D - \underbrace{2 \frac{kJ}{kg} \cdot \dot{m}}_{=\dot{Q}} + \dot{W}_t$$

Die Terme $\dot{m}pv$ heben sich auf. Für die innere Energie u kann $u = c_{H_2O}t$ gesetzt werden. Für den See sollen die Terme gz und $\frac{c^2}{2}$ null sein (Wahl des Koordinatensystems bzw. der Systemgrenze). Setzt man noch für c_D das Ergebnis aus (a) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{m} \left(c_{H_2O}(t_{See} - t_D) - \frac{\dot{V}^2}{2A^2} - gz_D - 2 \frac{kJ}{kg} \right) + \dot{W}_t \\ \dot{W}_t &= \rho \cdot \dot{V} \left(c_{H_2O}(t_D - t_{See}) + \frac{\dot{V}^2}{2A^2} + gz_D + 2 \frac{kJ}{kg} \right) = \\ \frac{0,012 m^3 \cdot 1000 \frac{kg}{m^3}}{60 s} &\left(4180 \frac{J}{kg \cdot K} (35^\circ C - 5^\circ C) + \frac{1}{2} \left(\frac{0,012 m^3}{60 s \cdot 50 \cdot 10^{-6} m^2} \right)^2 + 8m \cdot 9,81 \frac{N}{kg} + 2 \frac{kJ}{kg} \right) = \\ 0,2 \frac{kg}{s} &\left(125400 \frac{J}{kg} + 8 \frac{J}{kg} + 78,5 \frac{J}{kg} + 2000 \frac{J}{kg} \right) = 25,5 kW \end{aligned}$$

- d) Da die elektrische Leistung \dot{W}_t sich als Produkt aus Spannung und Stromstärke berechnet, gilt $\dot{W}_t = 220V \cdot 16 A = 3520 W$. Das Auflösen der Gleichung aus der vorhergehenden Teilaufgabe führt zu einer kubischen Gleichung für \dot{V} . Da der Wasserstrom aufgrund dieser deutlich geringeren Leistung deutlich kleiner sein wird als beim Teil (c), wird der Term der kinetischen Energie am Auslauf noch geringeren Einfluss haben als im Teil (c). Deshalb kann die kinetische Energie vernachlässigt werden, und die Lösung erhält man durch einfaches Umstellen der Gleichung:

$$\dot{V} = \frac{\dot{W}_t}{\rho \cdot \left(c_{H_2O}(t_D - t_{See}) + gz_D + 2 \frac{kJ}{kg} \right)} = 2,761 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s} = 1,6568 \frac{l}{min}$$

- e) Durch die Verlegung der Dusche an einen niedriger gelegenen Ort ändert sich das Vorzeichen von z_D . Es gilt in diesem Fall:

$$\dot{V} = \frac{\dot{W}_t}{\rho \cdot \left(c_{H_2O}(t_D - t_{See}) - g z_D + 2 \frac{kJ}{kg} \right)} = 2,765 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s} = 1,6588 \frac{l}{min}$$

Der Duschwasserstrom ändert sich also nur sehr geringfügig.

Aufgabe 3.9: *Wasserkraft im Bergbau anno 1750*
(Klausur F99)

Ein Bach mit dem Massenstrom $\dot{m} = 20 \frac{kg}{s}$ tritt in der Höhe $z_1 = 8 m$ in den adiabaten Maschinenraum eines Bergwerkes und verlässt ihn in der Höhe $z_2 = 0 m$.

Weitere Angaben: $c_{H_2O} = 4180 \frac{J}{kg \cdot K}$ $g = 9,81 \frac{N}{kg}$.

- a) Welche Leistung können die ausschließlich mit Wasserkraft angetriebenen Maschinen höchstens bereitstellen?
- b) Angenommen, eine Maschine zum Heben von Gestein erreicht nur die Hälfte der Leistung aus (a): Wie lange braucht diese Maschine, um einen Gesteinsack der Masse $m_{Gestein} = 150 kg$ aus der Tiefe von $z_3 = -60 m$ an die Oberfläche zu heben?
- c) Der Bach hat am Einlauf die Temperatur $t_{Bach} = 10,0000^\circ C$. Welche Temperatur t_{aus} hat das Wasser am Auslauf, wenn
 - c1) die Leistung nach (a) abgegeben wird?
 - c2) die Leistung nach (b) abgegeben wird?
 - c3) wenn z.B. am Sonntag alle Maschinen stillstehen?

Bitte geben Sie vier Stellen hinter dem Komma an!

- d) In der Tiefe $z_{See} = -85,39 m$ befindet sich ein See der Temperatur $t_{See} = 15,0000^\circ C$. Aus diesem See muss ständig Wasser an die Erdoberfläche gefördert werden, um eine Überflutung der Stollen zu verhindern. Zum Heben dieses Wassers wird eine Maschine in dem erwähnten Maschinenraum aufgestellt. Das geförderte Seewasser und das Bachwasser, das immer noch mit $t_{Bach} = 10,0000^\circ C$ einströmt, mischen sich und verlassen den Maschinenraum in der Höhe $z_{aus} = 0 m$ mit der Temperatur $t_{aus} = 10,3000^\circ C$. Die Ein- und Ausströmgeschwindigkeiten sollen vernachlässigbar klein sein. Der Luftdruck soll als konstant im gesamten System angesehen werden. Welcher Massenstrom wird gefördert?
- e) Welchen Wirkungsgrad erreicht die Wasserhebemaschine aus (d)?

Lösung: *Wasserkraft im Bergbau anno 1750*

- a) Zur Lösung dieses Problems betrachten wir den Ersten Hauptsatz für instationäre Prozesse in offenen Systemen:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left\{ U + m \left(\frac{c^2}{2} + gz \right) \right\}}_{=0} = \sum_k \left[\dot{m} \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right]_k + \underbrace{\dot{Q}}_{=0} + \dot{W}_t - p \dot{V}_{System}$$

Berücksichtigt man die Vernachlässigbarkeit der kinetischen Energien, so erhält man:

$$0 = \sum_k [\dot{m} (h + gz_k)]_k + \dot{W}_t = \sum_k [\dot{m} (c_{H_2O} t + gz)]_k + \dot{W}_t$$

Löst man nach \dot{W}_t auf und setzt für die Summe den einströmenden Massenstrom mit positivem und den ausströmenden mit negativem ($z=0$) Vorzeichen ein, so erhält man:

$$-\dot{W}_t = \dot{m} (c_{H_2O}(t_{ein} - t_{aus}) + gz_{ein})$$

Die maximale Leistung erzielt man, wenn keine potentielle Energie in innere Energie des Wassers umgewandelt wird, wenn also $t_{ein} = t_{aus}$ gilt. Es verbleibt dann

$$-\dot{W}_t = \dot{m}gz_{ein} = 20 \frac{kg}{s} \cdot 9,81 \frac{N}{kg} \cdot 8 m = 1570 W$$

b) Es steht eine technische Leistung von

$$\dot{W}_t^{50\%} = -785 W$$

zur Verfügung. Zur Hebung von $m_{Gestein} = 150 kg$ aus $z_3 = -60 m$ Tiefe ist eine Energie (technische Arbeit) von

$$W_t^{Hub} = m_3g(z_2 - z_3) = 88290 J = 88290 Nm = 88290 Ws$$

nötig. Mit der zur Verfügung stehenden Leistung $\dot{W}_t^{50\%}$ ergibt sich eine Hubzeit von

$$t_{Hub} = \frac{W_t^{Hub}}{|\dot{W}_t^{50\%}|} = \frac{88290 Ws}{785 W} = 112,5 s$$

c1) Da die Enthalpie des Wassers konstant bleibt, ändert sich auch die Temperatur nicht:

$$t_2 = t_1$$

c2) Wird die Leistung gemäß b) abgegeben, so gilt:

$$0 = \dot{m} (c_{H_2O}t_1 + gz_1) - \dot{m} (c_{H_2O}t_2 + gz_2) + \dot{W}_t^{50\%}$$

Es folgt:

$$t_2 = t_1 + \frac{g(z_1 - z_2)}{c_{H_2O}} + \frac{\dot{W}_t^{50\%}}{\dot{m}c_{H_2O}} = 10,0094^\circ C$$

c3) Stehen alle Maschinen still, gilt also $\dot{W}_t = 0$, so folgt:

$$0 = \dot{m} (c_{H_2O}t_1 + gz_1) - \dot{m} (c_{H_2O}t_2 + gz_2) + 0$$

bzw.

$$t_2 = t_1 + \frac{g(z_1 - z_2)}{c_{H_2O}} = 10,0188^\circ C$$

d) Wir betrachten ein System, das die ganze Maschinenanlage umschließt, und stellen für dieses System eine Energie-Bilanzgleichung auf. Dadurch wird es überflüssig, sich über die Einzelheiten des Aufbaus irgendwelche Gedanken zu machen. Möglich ist z.B., dass der Bach eine Turbine antreibt, diese einen Generator und dieser wiederum eine elektrische Pumpe. Auch der Antrieb eines oberflächigen Wasserrades,

das eine Eimerkette bewegt, ist möglich - für alle denkbaren Systeme muss der Erste Hauptsatz gelten. Das derart gewählte System tauscht mit seiner Umgebung ausschließlich konvektive Energieströme aus, d.h. Massenströme, die Ströme an innerer oder potentieller Energie mitnehmen, so dass sich die Energiebilanz folgendermaßen vereinfacht:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left\{ U + m \left(\frac{c^2}{2} + gz \right) \right\}}_{=0} = \sum_k \left[\dot{m} \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right]_k + \underbrace{\dot{Q}}_{=0} + \underbrace{\dot{W}_t}_{=0} - \underbrace{p \frac{dV_{System}}{dt}}_{=0}$$

Der Term auf der linken Seite bezeichnet die Änderung der inneren, kinetischen und potentiellen Energie im System. Diese Änderung ist 0, da ein stationärer Betriebszustand betrachtet werden soll. *Merke: stationärer Betriebszustand bedeutet nicht, dass sich im System nichts tut, sondern dass sich zu jedem Zeitpunkt dasselbe tut!* Der erste Term der rechten Seite bezeichnet die Enthalpie sowie die kinetische und potentielle Energie der ein- und ausströmenden Massen. Der zweite und dritte Term bezeichnet die mit der Umgebung ausgetauschten Wärme- und Arbeitsströme - beide sind null, und der letzte Term die Volumenänderungsarbeit, die natürlich ebenfalls null ist. Beim Ausschreiben der Summe werden die einströmenden Massenströme \dot{m}_{Bach} und \dot{m}_{See} positiv, der ausströmende Massenstrom ($\dot{m}_{Bach} + \dot{m}_{See}$) negativ gezählt. Ferner wird die kinetische Energie vernachlässigt und die Enthalpie h folgendermaßen umgeformt:

$$h = u + pv = (\text{wegen } p = \text{const}) c_{H_2O} t$$

Auf diese Weise erhält man folgende Gleichung:

$$\dot{m}_{Bach}(c_{H_2O} t_{Bach} + gz_{Bach}) + \dot{m}_{See}(c_{H_2O} t_{See} + gz_{See}) = (\dot{m}_{Bach} + \dot{m}_{See})(c_{H_2O} t_{aus} + \underbrace{gz_{aus}}_{=0})$$

Diese Gleichung wird nach \dot{m}_{See} aufgelöst:

$$\dot{m}_{See} = \dot{m}_{Bach} \frac{c_{H_2O}(t_{aus} - t_{Bach}) - gz_{Bach}}{c_{H_2O}(t_{See} - t_{aus}) + gz_{See}} =$$

$$20 \frac{kg}{s} \frac{4180 \frac{J}{kg \cdot K} (0,3 K) - 9,81 \frac{N}{kg} \cdot 8,0 m}{4180 \frac{J}{kg \cdot K} (4,7 K) - 9,81 \frac{N}{kg} \cdot 85,39 m} = 1,25 \frac{kg}{s}$$

- e) Wirkungsgradbestimmung: Aufwand (Nenner) ist die Energie, die die Maschine dem Bachwasser entnimmt, Nutzen (Zähler) ist die Energie, die dem Wasser aus dem See zugeführt wird. Die Temperaturänderungen und damit die Änderungen der Enthalpie sind in beiden Fällen klein, so dass im wesentlichen nur die Änderungen der potentiellen Energien zu berücksichtigen sind.

$$\eta = \frac{|\dot{m}_{See} \cdot g \cdot z_{See}|}{\dot{m}_{Bach} \cdot g \cdot z_1} = 0,667$$

Aufgabe 3.18: *Instationäres Ausströmen von Luft aus Pressluftflasche*

Aus einer Pressluftflasche mit dem Volumen $V_F = 50 \ell$ strömt Luft bis zum Druckausgleich $p = p_u$ in die Umgebung. Die Luft verhält sich wie ein ideales Gas. Durch Wärmeaustausch mit der Umgebung wird dafür gesorgt, dass die Temperatur der Luft in der Flasche konstant bleibt.

Anfangszustand (Zeitpunkt t_1): $p_A = 101 \text{bar}$, $T_A = 290 \text{K}$

Endzustand (Zeitpunkt t_2): $p = p_u = 1 \text{bar}$

Welche Wärme Q muss der Pressluft zugeführt werden?

Lösung: *Instationäres Ausströmen von Luft aus Pressluftflasche*

Aussage des ersten Hauptsatzes:

$$\begin{aligned}dU &= \sum h dm + dQ \\d(mu) &= -h dm_{ab} + dQ \\m du + u dm &= -h dm_{ab} + dQ\end{aligned}$$

Die Masse der Luft in der Flasche ergibt sich zu jedem Zeitpunkt aus:

$$m = \frac{pV_F}{R_L T},$$

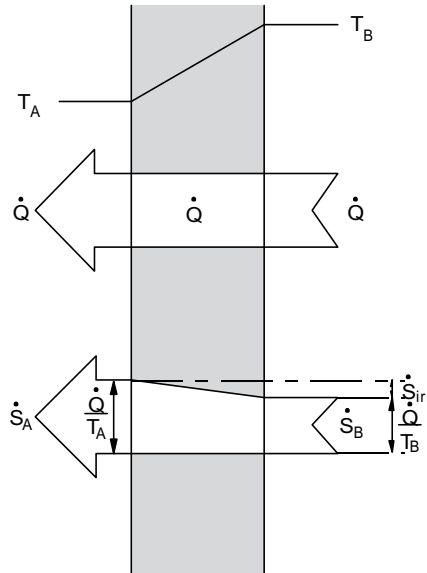
ihre Änderung zu:

$$\begin{aligned}dm &= \frac{V_F}{R_L T} dp + \underbrace{0}_{dT=0} + \underbrace{0}_{dV=0} = -dm_{ab} \\m \underbrace{du}_{=0, dT=0} + u \frac{V_F}{R_L T} dp &= h \frac{V_F}{R_L T} dp + dQ \\ \Rightarrow dQ &= \underbrace{(u - h)}_{-pv} \frac{V_F}{R_L T} dp = -V_F dp \\ Q &= -V_F(p_u - p_A) \\ &= -50 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 \cdot (-100 \text{bar}) \frac{10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{\text{bar}} \frac{\text{J}}{\text{Nm}} \\ &= 5 \cdot 10^5 \text{J}\end{aligned}$$

Übung 3

Aufgabe 3.10: *Entropieproduktion durch Wärmeleitung*

Die Wände eines Hauses trennen die kalte Umgebungsluft $t_A = 0^\circ\text{C}$ von der warmen Raumluft $t_B = 25^\circ\text{C}$. Es fließt ein konstanter Wärmestrom $\dot{Q} = 10\text{kW}$.



- Formulieren Sie die Entropiebilanz für dieses Problem.
- Wie groß ist der Entropiestrom aus dem Innenraum, wie groß der Entropiestrom in die Umgebung?
- Wieviel Entropie wird produziert, und warum ist diese stets größer Null?
- Wie muss die Temperaturdifferenz $(T_B - T_A)$ gewählt werden, damit möglichst wenig Entropie produziert wird, d.h. wie müsste ein reversibler Wärmeübergangsprozess geführt werden?
- Welcher Einfluss ergibt sich auf die Entropieproduktion, wenn T_A und T_B beide gleichermaßen um denselben Betrag ΔT erhöht werden?

Lösung: *Entropieproduktion durch Wärmeleitung*

- Als thermodynamisches System bzw. als Kontrollvolumen muss die Wand betrachtet werden. An der einen Seite der Oberfläche hat diese die Temperatur T_a , an der anderen die Temperatur T_b . Da es sich um ein geschlossenes System handelt, fällt aus der Entropiebilanz die Summe über die Massenströme \dot{m} heraus. Außerdem befindet sich das System in einem stationären Zustand (Gilt nur bei Wand als

Kontrollvolumen!). Daher ist die Ableitung nach der Zeit ebenfalls null.

$$\underbrace{\frac{dS_{System}}{dt}}_{=0} = \underbrace{\sum_i (\dot{m}s)_i}_{=0} + \sum_j \left(\frac{\dot{Q}}{T} \right)_j + \dot{S}_{prod} \Rightarrow \dot{S}_{prod} = - \sum_j \left(\frac{\dot{Q}}{T} \right)_j$$

- b) Die Summe ist über $j = 1, 2$ zu bilden, wobei der Index 1 für den Innenraum stehen soll und der Index 2 für die Umgebung. Nun ist es notwendig zu wissen, in welchem Bereich die größere Temperatur herrscht, da der Wärmestrom immer entgegen dem Temperaturgradienten fließt, also „vom Warmen zum Kalten“. Unter der Annahme, dass $T_B > T_A$ ist, gilt $\dot{Q}_B = |\dot{Q}| > 0$ und $\dot{Q}_A = -|\dot{Q}| < 0$. Es ergibt sich demnach für die Entropieproduktion:

$$\dot{S}_{prod} = - \left[\left(\frac{\dot{Q}_B}{T_B} \right) + \left(\frac{\dot{Q}_A}{T_A} \right) \right] = - \left(\frac{\dot{Q}}{T_B} - \frac{\dot{Q}}{T_A} \right)$$

Diese Gleichung besagt, dass der Wand aus dem Innenraum Entropie auf dem Temperaturniveau T_B zugeführt wird (positives Vorzeichen!), während die Wand an die Umgebung Entropie auf dem Temperaturniveau T_A abgibt (negatives Vorzeichen). Setzt man die vorgegebenen Werte ein, so erhält man schließlich folgende Entropieströme:

$$\text{Innenraum } \dot{S}_B = 33,540 \frac{W}{K} \quad \text{Umgebung } \dot{S}_A = -36,601 \frac{W}{K}$$

(Vorzeichen für die Wahl der Wand als Kontrollvolumen). Achtung: Temperaturen in K !

- c) Umformen der Gleichung von Aufgabenteil b) ergibt:

$$\dot{S}_{prod} = \dot{Q} \frac{T_B - T_A}{T_B T_A}$$

Der Grund für die stets positive Entropieproduktion ist die bereits erwähnte Richtung des Wärmeflusses. Das Wärme abgebende System ist stets auf einem höheren Temperaturniveau als das Wärme aufnehmende System. Aus diesem Grund ist die Entropieabgabe des wärmeren Systems stets kleiner als die Entropieaufnahme des kälteren Systems, die Entropieproduktion also stets positiv.

- d) Man sieht anhand der Gleichung aus Aufgabenteil c), dass man die Entropieproduktion theoretisch beliebig verringern kann, indem man mit möglichst kleinen Temperaturdifferenzen arbeitet.
- e) Eine Erhöhung beider Temperaturen senkt die Entropieproduktion, konstanten Wärmestrom \dot{Q} vorausgesetzt. Beispielsweise ist die Entropieproduktion bei $T_B = 310 K, T_A = 300 K$ um 76 Prozent größer als bei $T_B = 410 K, T_A = 400 K$, obwohl die Temperaturdifferenz dieselbe ist.

Um die Entropieproduktion bei der Übertragung eines Wärmestroms gering zu halten, ist also bei niedrigen Übertragungstemperaturen eine besonders geringe Temperaturdifferenz und somit eine besonders große Austauschfläche erforderlich - ein Grund dafür, dass Kühltürme von Kraftwerken so groß sind.

Aufgabe 3.12: *Abkühlung von Wasser*

Ein dünnwandiger Behälter mit konstantem Volumen enthält Wasser mit der Masse $m_W = 1,0\text{kg}$, dessen spezifische Wärmekapazität $c_W = 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$ als konstant angenommen wird. Zur Zeit $t = 0$ hat das Wasser die Temperatur $T_0 = 350\text{K}$; es kühlt sich durch Wärmeabgabe an die Umgebung ab, deren Temperatur $T_u = 280\text{K}$ sich trotz Energieaufnahme nicht ändern soll (Eigenschaft eines Wärmereservoirs). Berechnen Sie

- die zeitliche Änderung der Wassertemperatur T ,
- die zeitliche Änderung der Entropien des Wassers und der Umgebung sowie
- die durch den irreversiblen Wärmeübergang erzeugte Entropie.

Für den vom Behälter abgegebenen Wärmestrom gilt:

$$\dot{Q} = kA(T - T_u).$$

Dabei ist A die Fläche der diathermen Behälterwand zwischen dem Wasser und der Umgebung und k der Wärmedurchgangskoeffizient. Im vorliegenden Beispiel sei $kA = 0,75\text{W/K}$. Die Wassertemperatur sei im ganzen Behälter räumlich konstant; die Energie- und Entropieänderungen der dünnen Behälterwand werden vernachlässigt.

Lösung: *Abkühlung von Wasser*

- Erster Hauptsatz (allgemeine Formulierung)

$$\frac{d}{dt} \left\{ U + m \left(\frac{c^2}{2} + gz \right) \right\} = \sum_k \left[\dot{m} \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right]_k + \dot{Q} + \dot{W}_t - p \frac{dV_{\text{System}}}{dt}$$

Nach Einarbeitung der Angaben in der Aufgabenstellung verbleibt für das System Wasserbehälter

$$\frac{dU_W}{dt} = -\dot{Q} = -kA(T - T_u).$$

Mit $dU_W = m_W c_W dT$ und mit dem Wärmetransportansatz aus der Aufgabenstellung folgt

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{kA}{m_W c_W} (T - T_u) = -\frac{1}{t_0} (T - T_u)$$

als Differentialgleichung, aus der die zeitliche Temperaturänderung des Wassers bestimmt werden kann. Die Größe t_0 ist eine für die Abkühlung charakteristische Zeitkonstante, die hier den Wert

$$t_0 = \frac{m_W c_W}{kA} = \frac{4,19\text{kJ/K}}{0,75\text{W/K}} = 5,59 \cdot 10^3\text{s} = 1,55\text{h}$$

hat. Durch Integration ergibt sich

$$\frac{T - T_u}{T_0 - T_u} = e^{-t/t_0},$$

wobei die Anfangsbedingung $T = T_0$ für $t = 0$ berücksichtigt wurde.

b) Entropiebilanz (allgemeine Formulierung)

$$\frac{dS_{System}}{dt} = \sum_i (\dot{m}s)_i + \sum_j \left(\frac{\dot{Q}}{T} \right)_j + \dot{S}_{prod}$$

Nach Einarbeitung der Angaben in der Aufgabenstellung verbleibt für das System Wasserbehälter

$$\frac{dS_W}{dt} = -\frac{\dot{Q}}{T} + 0.$$

Mit der Aussage des 1.H.S. $dU_W = -\dot{Q}dt$ und mit $dU_W = m_W c_W dT$ folgt die Differentialgleichung

$$dS_W = m_W c_W \frac{dT}{T}.$$

Durch Integration zwischen $t = 0$, entsprechend $T = T_0$, und einer beliebigen Zeit t , zu der die Wassertemperatur den Wert $T(t)$ hat, ergibt sich

$$S_W(t) = S_W(0) + m_W c_W \ln \left(\frac{T(t)}{T_0} \right).$$

Die Entropie des Wassers nimmt demnach durch Wärmeabgabe ab. Die Entropie der Umgebung dagegen nimmt zu, weil ihr mit der zugeführten Wärme auch Entropie zugeführt wird.

$$\frac{dS_u}{dt} = +\frac{\dot{Q}}{T_u} + 0 \Rightarrow dS_u = -m_W c_W \frac{dT}{T_u}$$

Integration dieser Gleichung liefert

$$S_u(t) = S_u(0) + m_W c_W \left(\frac{T_0 - T(t)}{T_u} \right).$$

Da $T(t) \leq T_0$ ist, nimmt S_u mit fortschreitender Zeit monoton zu. Diese Entropiezunahme kommt nicht nur dadurch zustande, dass das Wasser Entropie abgibt. Zusätzlich wird in der Behälterwand Entropie durch den Wärmetransport mit endlicher Temperaturdifferenz produziert.

c) Für das Gesamtsystem Wasser plus Umgebung liefert die Entropiebilanz

$$S_{prod} = S(t) - S(0) = S_W(t) + S_u(t) - S(0) = m_W c_W \left[\frac{T_0 - T(t)}{T_u} - \ln \left(\frac{T_0}{T(t)} \right) \right].$$

Aufgabe 3.13: *Entropieproduktion der Wasserkraft im Bergbau*

In der folgenden Aufgabe wird untersucht, wie die Wasserkraft im Bergbau nach Aufgabe 3.9 d) Entropie aufnimmt, abgibt und produziert.

- a) Berechnen Sie die Entropieproduktion pro Zeit. Stellen Sie dazu eine Bilanzgleichung auf, und berechnen Sie die ein- und ausströmenden Entropien, wobei auf $1 \frac{mW}{K}$ genau gerechnet werden soll.

Im Folgenden soll der Maschinenraum zusätzlich noch beheizt werden. Außerdem soll er nicht mehr adiabat sein, sondern es soll ein Wärmestrom an die Umgebung abgegeben werden. Dazu wird eine Elektroheizung im Inneren installiert. Dadurch wird dem Raum eine elektrische Leistung von $20kW$ zugeführt. An die Umgebung soll ein Wärmestrom von $10kW$ bei einer Temperatur von $t_U = 10^\circ C$ abgeführt werden. Ansonsten gelten die gleichen Rahmenbedingungen wie in Aufgabe 3.9 d), nur die Temperatur des austretenden Wasserstromes t_{aus} wird durch die Beheizung des Maschinenraumes um ΔT auf die Temperatur t'_{aus} erhöht.

- b) Berechnen Sie Austrittstemperatur t'_{aus} des Wassers.
c) Berechnen Sie die Entropieproduktion pro Zeit \dot{S}_{prod} des beheizten Wasserhebewerkes.

Lösung: *Entropieproduktion der Wasserkraft im Bergbau*

- a) Um die Entropie der ein- und ausströmenden Wasserströme zu berechnen, denkt man sich, dass das Wasser ausgehend von einer Bezugstemperatur von $T_0 = 273,15K$ reversibel auf die jeweilige Endtemperatur erwärmt worden ist. Dann kann der Entropiegehalt nach Gleichung (2.5) analog berechnet werden:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Big|_{rev}$$
$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{c_{H_2O}}{T} dT$$
$$s(T) - s(T_0) = \int_{T_0}^T \left(\frac{c_{H_2O}}{T} \right) dT = c_{H_2O} \cdot \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)$$

Unter Voraussetzung der Normierung $s(T_0 = 273,15K) = 0$ gilt:

$$s(T) = c \cdot \ln \left(\frac{T}{273,15 K} \right)$$

Die allgemeine Entropiebilanz lautet:

$$\frac{dS_{System}}{dt} = \sum_i (\dot{m}s)_i + \sum_j \left(\frac{\dot{Q}}{T} \right)_j + \dot{S}_{prod}$$

In dieser Gleichung ist der Term links vom Gleichheitszeichen zu streichen (stationärer Betriebszustand). Auch der zweite Term der rechten Seite ist null (adiabates System). Die Summe über i ist über drei Massenströme auszuführen: ($\dot{m}_1 = 20 \frac{kg}{s}$, $\dot{m}_2 = 1,25 \frac{kg}{s}$, $\dot{m}_3 = -21,25 \frac{kg}{s}$). Setzt man die Ergebnisse für s ein ($t_1 = 10^\circ C \Leftrightarrow T_1 = 283,15 K$, $t_2 = 15^\circ C \Leftrightarrow T_2 = 288,15 K$, $t_3 = 10,3^\circ C \Leftrightarrow T_3 = 283,45 K$) und löst nach \dot{S}_{prod} auf, so erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{prod} &= -\dot{m}_1 c \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \dot{m}_2 c \ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right) - \dot{m}_3 c \ln\left(\frac{T_3}{T_0}\right) = \\ &= -3005,896 \frac{J}{s \cdot K} - 279,329 \frac{J}{s \cdot K} + 3287,826 \frac{J}{s \cdot K} = 2,601 \frac{W}{K} \end{aligned}$$

- b) Die zugeführte elektrische Leistung $\dot{W}_t = 20 kW$ wird zum Teil als Wärmestrom \dot{Q}_U an die Umgebung abgeführt. Der Rest

$$\dot{W}_{t,Rest} = \dot{W}_t - \dot{Q}_U = 20 kW - 10 kW = 10 kW$$

wird in Form von Innerer Energie des Baches an die Umgebung wieder abgegeben. Die Erhöhung der Bachtemperatur durch die Heizung berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{t,Rest} &= \dot{m}_{aus} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T \\ \Delta T &= \frac{\dot{W}_{t,Rest}}{\dot{m}_{aus} \cdot c_{H_2O}} = t'_{aus} - t_{aus} = 0,1126 K \end{aligned}$$

Für die Austrittstemperatur des Wassers ergibt sich nun $t'_{aus} = 10,1126^\circ C$.

- c) Für die Berechnung der Entropiebilanz des beheizten Wasserhebewerkes muss erneut die Entropiebilanz aufgestellt werden:

$$\frac{dS_{System}}{dt} = \sum_i (\dot{m} \cdot s)_i + \sum_j \left(\frac{\dot{Q}}{T}\right)_j + \dot{S}_{prod}$$

Da das System stationär ist, fällt der Term auf der linken Seite weg und es gilt:

$$\dot{S}_{prod} = -\dot{m}_1 \cdot c_{H_2O} \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \dot{m}_2 \cdot c_{H_2O} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right) - \dot{m}_3 \cdot c_{H_2O} \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_0}\right) - \frac{\dot{Q}_U}{T_U}$$

Insgesamt ergibt sich eine Entropieproduktion von

$$\dot{S}_{prod} = 73,1965 \frac{J}{s \cdot K}$$

Übung 4

Aufgabe 3.27: *Fundamentalgleichung I*

- Erläutern Sie den Unterschied zwischen Zustandsgrößen und Prozessgrößen.
- Handelt es sich bei der Funktion $G(T, p, n_1, n_2, \dots, n_k)$ um eine Fundamentalgleichung?
- Bestätigen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T, n_j} = - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p, n_j}$$

für den reinen Stoff j.

Lösung: *Fundamentalgleichung I*

- Zustandsgrößen beschreiben den Gleichgewichtszustand eines Systems. Sie sind unabhängig davon, auf welchem Weg das System in diesen Zustand gelangt ist; d.h. sie sind wegunabhängig. Prozessgrößen werden über die Systemgrenze ausgetauscht, sie sind keine Eigenschaften des Systems und sind wegababhängig.
- Ja, da man alle thermodynamischen Zustandsgrößen des Systems durch Differenzieren aus dieser Fundamentalgleichung erhalten kann.
- Definition der freien Enthalpie:

$$G = H - TS$$

Es folgt für das totale Differential:

$$dG = dH - TdS - SdT.$$

Die Definition der Enthalpie lautet:

$$H = U + pV$$

mit dem totalen Differential

$$dH = dU + pdV + Vdp.$$

Einsetzen der Gibbs'schen Fundamentalgleichung liefert

$$dG = -SdT + Vdp.$$

Fundamentalgleichung $G = G(T, p)$:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V.$$

Wegen

$$\left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T\right]_p$$

folgt

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Aufgabe 3.31: *Fundamentalgleichung und Zustandsgleichung*

Die Fundamentalgleichung der freien Enthalpie für Helium (1-atomig: $C_{p,m}^0 = \frac{5}{2}R_m$) lautet:

$$G = G(T, p, n) = n \left\{ \alpha(T - T_0) - \alpha T \ln \frac{T}{T_0} + \beta T \ln \frac{p}{p_0} \right\}$$

mit n = Molmenge

α, β anpassbare Koeffizienten und

T_0, p_0 beliebig wählbare Bezugswerte für Temperatur und Druck mit der Forderung $G_0(T_0, p_0, n) = 0$.

a) Zeigen Sie dass die Beziehungen

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,n} = V \text{ und } \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,n} = -S \text{ richtig sind.}$$

b) Berechnen Sie die Zustandsgleichung für

b 1) das Volumen $V = V(T, p, n)$

b 2) die Entropie $S = S(T, p, n)$

b 3) die Enthalpie $H = H(T, p, n)$ und

b 4) die molare Wärmekapazität $C_{p,m} = C_{p,m}(T, p)$.

Lösung: *Fundamentalgleichung und Zustandsgleichung*

a) Aus der Fundamentalgleichung für die freie Enthalpie $G(T, p, n)$ folgt für das totale Differential:

$$dG(T, p, n) = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,n} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,n} dp + \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{T,p} dn$$

Mit Hilfe der Definitionsgleichungen für G und H sowie der Gibbsschen Fundamentalgleichung findet man:

$$dG = d(H - TS) = d(U + pV - TS) = dU + d(pV) - d(TS) =$$
$$\underbrace{TdS - pdV + \mu dn}_{=dU} + pdV + Vdp - SdT - TdS = -SdT + Vdp + \mu dn$$

Koeffizientenvergleich mit dem ersten totalen Differential liefert:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,n} = -S \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,n} = V \quad \text{und (nicht gefragt)} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{T,p} = \mu$$

b1) Für das Volumen $V(T, p, n)$ gilt:

$$V(T, p, n) = \left(\frac{\partial G(T, p, n)}{\partial p}\right)_{T,n} = n\beta T \frac{p_0}{p} \frac{1}{p_0} = \frac{n\beta T}{p}$$

b2) Für die Entropie $S(T, p, n)$ gilt:

$$S(T, p, n) = - \left(\frac{\partial G(T, p, n)}{\partial T} \right)_{p, n} = -n\alpha + n\alpha \ln \frac{T}{T_0} + n\alpha T \frac{T_0}{T} \frac{1}{T_0} - n\beta \ln \frac{p}{p_0} = n \left(\alpha \ln \frac{T}{T_0} - \beta \ln \frac{p}{p_0} \right)$$

b3) Für die Enthalpie $H(T, p, n)$ gilt:

$$H(T, p, n) = G(T, p, n) + TS = n \left\{ \alpha (T - T_0) - \alpha T \ln \frac{T}{T_0} + \beta T \ln \frac{p}{p_0} \right\} + T n \underbrace{\left(\alpha \ln \frac{T}{T_0} - \beta \ln \frac{p}{p_0} \right)}_{=S}$$

Somit verbleibt

$$H(T, p, n) = n\alpha (T - T_0)$$

b4) Zur Bestimmung der molaren Wärmekapazität muss zunächst aus b3) die molare Enthalpie $H_m(T, p)$ bestimmt werden. Es gilt:

$$H_m(T, p) = \frac{H(T, p, n)}{n} = \alpha (T - T_0)$$

Für die molare Wärmekapazität $C_{p,m}(T, p)$ gilt:

$$C_{p,m}(T, p) = \left(\frac{\partial H_m(T, p)}{\partial T} \right)_p = \alpha$$

Aufgabe 4.1: *Molare isochore Wärmekapazität*

Ein realer Stoff besitzt die folgenden Eigenschaften:

Molare Wärmekapazität im Idealgaszustand

$$C_{p,m}^0 = A + BT + CT^2$$

Thermische Zustandsgleichung

$$p = \frac{R_m T}{V_m} + \frac{a + b/T}{V_m^2}$$

Berechnen Sie die molare isochore Wärmekapazität als Funktion von T und V_m .

Lösung: *Molare isochore Wärmekapazität*

Die Berechnungsvorschrift für die molare isochore Wärmekapazität lautet:

$$C_{v,m}(V_m, T) = C_{v,m}^0(T) + T \int_{V_{0,m} \rightarrow \infty}^{V_m} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_{V_m} dV_m.$$

Die partielle Ableitung wird aus der Zustandsgleichung berechnet:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V_m} &= \frac{R_m}{V_m} - \frac{b}{T^2 V_m^2} \\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_{V_m} &= \frac{2b}{T^3 V_m^2} \end{aligned}$$

Mit Einarbeitung der molaren isochoren Wärmekapazität im Idealgaszustand $C_{v,m}^0 = C_{p,m}^0 - R_m$ ergibt sich:

$$C_{v,m} = A + BT + CT^2 - R_m - \frac{2b}{T^2 V_m}$$

Aufgabe 4.3: *Adiabate Drosselung von Kohlendioxid*

Für gasförmiges Kohlendioxid CO_2 gilt:

$$\text{thermische Zustandsgleichung } v = \frac{R_{CO_2}T}{p} - \frac{A + Bp}{(T/K)^{10/3}} \quad \text{mit}$$

$$R_{CO_2} = 0,189 J/(gK),$$

$$A = 3,83 \cdot 10^7 J/(g \text{ bar}),$$

$$B = 5,8 \cdot 10^5 J/(g \text{ bar}^2),$$

$$\text{spezifische isobare Wärmekapazität } c_p^0 = 0,56 J/(gK) + 9,6 \cdot 10^{-4} J/(gK) \cdot \frac{T}{K}$$

- a) Berechnen Sie die spezifische Enthalpie $h(T, p)$.
- b) Das CO_2 wird vom Zustand $T_1 = 300K; p_1 = 30 \text{ bar}$ adiabatisch bis zum Druck $p_2 = 1 \text{ bar}$ gedrosselt. Zeigen Sie, dass $T_2 = 261K$ ist.

Lösung: *Adiabate Drosselung von Kohlendioxid*

- a) Die Berechnungsvorschrift für die spezifische Enthalpie wird der Tabelle der thermodynamischen Zustandfunktionen entnommen

$$\begin{aligned} dh &= c_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp \\ h &= \int_{T_0}^T c_p^0 dT_{p=p_0 \rightarrow 0} - T^2 \int_{p_0 \rightarrow 0}^p \left(\frac{\partial(v/T)}{\partial T} \right)_p dp_T + h_0 \quad \text{mit } h_0(T_0, p_0) = \text{konstant} \\ &= \int_{T_0}^T c_p^0 dT_{p_0 \rightarrow 0} + \int_{p_0 \rightarrow 0}^p \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp_T + h_0 \end{aligned}$$

Diese Berechnungsvorschrift wird von innen nach außen ausgewertet:

$$\begin{aligned} \frac{v}{T} &= \frac{R_{CO_2}}{p} - \frac{A + Bp}{(1/K)^{10/3} T^{13/3}} \\ \left(\frac{\partial(v/T)}{\partial T} \right)_p &= + \frac{13}{3} \cdot \frac{A + Bp}{(1/K)^{10/3} T^{16/3}} \\ h(T, p) &= \int_{T_0}^T c_p^0 dT - T^2 \int_{p_0 \rightarrow 0}^p \frac{13}{3} \cdot \frac{A + Bp}{(1/K)^{10/3} T^{16/3}} dp + h_0 \\ &= 0,56 J/(gK)(T - T_0) + \frac{1}{2} \cdot 9,6 \cdot 10^{-4} J/(gK^2) \cdot (T^2 - T_0^2) \\ &\quad - \frac{13}{3} \cdot \frac{A}{\left(\frac{T}{K}\right)^{10/3}} \cdot p - \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{3} \cdot \frac{B}{\left(\frac{T}{K}\right)^{10/3}} \cdot p^2 + h_0 \end{aligned}$$

- b) Die Aussage des Ersten Hauptsatzes für die adiabatische Drosselung unter Vernachlässigung von Änderungen der potentiellen und kinetischen Energien lautet:

$$h_2 = h_1.$$

Einsetzen der gegebenen Daten bestätigt T_2 .

Übung 5

Aufgabe 4.12: *Besonderheiten von Wasser*

Warum und wo überleben Fische Frostperioden?

Kann man auf Trockeneis (gefrorenem Kohlendioxid) Schlittschuh laufen?

Begründen Sie Ihre Antworten mit Hilfe von geeigneten Diagrammen.

Lösung: *Besonderheiten von Wasser*

Fische profitieren erstens davon, dass Wasser beim Gefrieren sein Volumen vergrößert. Folglich schwimmt das Eis, das sich an der Oberfläche bildet, und isoliert die Wassermasse gegen weiteren Wärmeverlust. Außerdem erreicht das flüssige Wasser seine größte Dichte bei etwa 4°C , so dass ein See seine Temperaturschichtung bei Abkühlung umkehrt; d.h. das kalte Wasser befindet sich oben, während sich am Grund wärmeres Wasser von bis zu 4°C befindet. In einer gewissen Tiefe bleibt das Wasser deshalb auch bei langen Frostperioden flüssig.

Bei Wasser ist die Schmelzdruckkurve nach links geneigt, so dass eine Druckerhöhung die isotherme Verflüssigung bewirken kann. Die Kufen von Schlittschuhen üben auf das Eis aufgrund ihrer kleinen Oberfläche einen sehr großen Druck aus. Das Eis wird für einen Augenblick flüssig, ohne sich zu erwärmen. Dieser Mechanismus funktioniert nicht auf Trockeneis, weil die Schmelzlinie im p - T -Diagramm für CO_2 nach rechts geneigt ist. Folglich kann man durch isotherme Druckerhöhung nicht ins Flüssigkeitsgebiet gelangen.

Aufgabe 5.15: *Realer Stoff I*

Die allgemeine (molare) Gaskonstante R_m hat den Wert $R_m = 8,3143 \frac{kJ}{kmolK}$!

a) Von einem Kältemittel sind bekannt

$$s' = 4,18680 \frac{kJ}{kgK} \quad s'' = 4,75394 \frac{kJ}{kgK}$$
$$r = 154,87 \frac{kJ}{kg}$$

Berechnen Sie die Siedetemperatur.

b) Dieser Aufgabenteil soll zeigen, wie man Zustandsgrößen im Nassdampfgebiet bestimmt. Vom Zustandspunkt 1 (siedende Flüssigkeit, $p_1 = 10bar$) gehen folgende Zustandsänderungen aus:

1 \rightarrow 2 isentrope Expansion bis $p_2 = 1bar$

1 \rightarrow 3 isenthalpe Zustandsänderung bis $p_3 = 1bar$

1 \rightarrow 4 isochore Wärmeabfuhr bis $p_4 = 1bar$.

Auszug aus der Dampftafel (Sättigungswerte):

T/K	p/bar	$v'/\frac{m^3}{kg}$	$v''/\frac{m^3}{kg}$	$h'/\frac{J}{g}$	$h''/\frac{J}{g}$	$s'/\frac{J}{gK}$	$s''/\frac{J}{gK}$
453,03	10	0,001128	0,1944	762,2	2777,5	2,1372	6,5842
372,78	1	0,001044	1,6936	417,3	2673,8	1,3022	7,3544

b1) Wie groß sind die Temperatur T_1 und der Nassdampfgehalt x_1 der siedenden Flüssigkeit?

b2) Wie groß sind die Werte $x_2, h_2; x_3, v_3; x_4$? Stellen Sie zunächst fest, welche spezifische Zustandsgröße im Endpunkt 2, 3 bzw. 4 durch den Verlauf der Zustandsänderung festgelegt wird. Diese Größe liefert x .

Lösung: *Realer Stoff I*

a) Fundamentalgleichung:

$$\int dh = T \int ds + \int v dp$$

Integration durch das Nassdampfgebiet mit $dT = dp = 0$:

$$h'' - h' = T(s'' - s')$$

Es folgt:

$$T = \frac{r}{s'' - s'} = \frac{154,87 \frac{kJ}{kg}}{(4,75394 - 4,18680) \frac{kJ}{kg}} = 273,07K \approx 0^\circ C \quad (\text{Tafelwert!})$$

b1) Zustand 1 entspricht der siedenden Flüssigkeit bei $p_1 = 10bar$. Es folgt

$$\Rightarrow T_1 = T_{siede}(10bar) = 453,03K \quad x_1 = 0$$

$$\text{b2) } 1 \rightarrow 2: s_1 = s_2 = x_2 s_2'' + (1 - x_2) s_2' = s_1'$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{s_2 - s_2'}{s_2'' - s_2'} = \frac{2,1372 - 1,3022}{7,3544 - 1,3022} = 0,13796$$

$$h_2 = x_2 h_2'' + (1 - x_2) h_2' = h_2' + x_2 (h_2'' - h_2') =$$

$$417,3 \frac{J}{g} + 0,13796 (2673,8 - 417,3) \frac{J}{g} = 728,62 \frac{J}{g}$$

$$1 \rightarrow 3: h_1 = h_3 = x_3 h_3'' + (1 - x_3) h_3' = h_1'$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{h_3 - h_3'}{h_3'' - h_3'} = \frac{762,2 - 417,3}{2673,8 - 417,3} = 0,1528$$

$$\Rightarrow v_3 = v_3' + x_3 (v_3'' - v_3') = [0,001044 + 0,1528 (1,6936 - 0,001044)] \frac{m^3}{kg} = 0,2597 \frac{m^3}{kg}$$

$$1 \rightarrow 4: v_1 = v_4 = x_4 v_4'' + (1 - x_4) v_4' = v_1'$$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{v_4 - v_4'}{v_4'' - v_4'} = \frac{0,001128 - 0,001044}{1,6936 - 0,001044} = 5 \cdot 10^{-5}$$

Aufgabe 5.18: *Dampfkessel*

In einem Dampfkessel ($V = 0,60 \text{ m}^3$) befinden sich zum Zeitpunkt t_1 insgesamt $m = 300 \text{ kg}$ Wasser bei einer Temperatur von $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Neben dem Wasser befindet sich keine weitere Materie in dem Kessel. Das bedeutet, dass der Druck im Kessel sich vom Umgebungsdruck unterscheiden kann.

- Welche Masse m' befindet sich dabei im Zustand der siedenden Flüssigkeit und welche Masse m'' im Zustand des gesättigten Dampfes?
- Welche Wärme Q_{12} muss dem Kessel zugeführt werden, wenn das Wasser bei unverändertem Kesselvolumen den Druck $p_2 = 100 \text{ bar}$ erreichen soll?
- Wieviel Wasser Δm verdampft während dieser Zustandsänderung?

Zustandsgrößen des Wassers im Phasengleichgewicht:

p/bar	$t / ^\circ\text{C}$	$v' / \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	$v'' / \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	$h' / \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	$h'' / \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
0,023	20	0,00100	57,84	83,9	2537,3
100	310,9	0,00145	0,018	1407,0	2725,6

Lösung: *Dampfkessel*

- Das Phasengleichgewicht zwischen Dampf und Flüssigkeit bei $t_1 = 20^\circ\text{C}$ bedeutet $p_1 = 0,023 \text{ bar} = 2300 \text{ Pa}$:

$$v_1 = v'_1 + x_1(v''_1 - v'_1) = \frac{V}{m} \Rightarrow$$
$$x_1 = \frac{\frac{V}{m} - v'_1}{v''_1 - v'_1} = \frac{\frac{0,6 \text{ m}^3}{300 \text{ kg}} - 0,001 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{57,839 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} = 1,729 \cdot 10^{-5}$$

Außerdem muss gelten:

$$x_1 = \frac{m''_1}{m'_1 + m''_1} = \frac{m''_1}{m}$$

Man findet somit:

$$m''_1 = x_1 \cdot m = 5,187 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad m'_1 = (1 - x_1) \cdot m = 299,994813 \text{ kg}$$

- Zur Bestimmung der zuzuführenden Wärme wird der Erste Hauptsatz aufgestellt. Dabei wird von Anfang an berücksichtigt, dass die kinetische und potentielle Energieänderung null ist und der Dampfkessel ein geschlossenes System darstellt ($\Delta m = 0$).

$$U_2 - U_1 = W_{t,12} + Q_{12} - \int_1^2 p_u dV$$

wobei gilt:

$$dV = 0 \quad (\text{isochorer Prozess}) \quad \text{sowie} \quad W_{t,12} = 0$$

Es folgt:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = H_2 - p_2V - H_1 + p_1V = m [h_2 - h_1 - v(p_2 - p_1)]$$

Zur Berechnung von h_1 wird der bereits berechnete Dampfanteil x_1 benötigt:

$$h_1 = x_1 h_1'' + (1 - x_1) h_1' = 83,942 \frac{kJ}{kg}$$

Entsprechend ist x_2 zur Berechnung von h_2 notwendig:

$$x_2 = \frac{\frac{V}{m} - v_2'}{v_2'' - v_2'} = 0,03323 \quad \Rightarrow \quad h_2 = (1 - x_2) h_2' + x_2 h_2'' = 1450,82 \frac{kJ}{kg}$$

Die zuzuführende Wärme berechnet sich dann (mit $v = \frac{V}{m}$):

$$Q_{12} = m \left[h_2 - h_1 - \frac{V}{m} (p_2 - p_1) \right] =$$
$$300 \text{ kg} \left[1450,82 \frac{kJ}{kg} - 83,942 \frac{kJ}{kg} - 0,002 \frac{m^3}{kg} (9997700 \text{ Pa}) \right] = 404,065 \text{ MJ}$$

c) Es gilt:

$$x_2 = \frac{m_2''}{m}; \quad x_1 = \frac{m_1''}{m}$$

Somit folgt:

$$\Delta m = m_2'' - m_1'' = m(x_2 - x_1) = 9,964 \text{ kg}$$

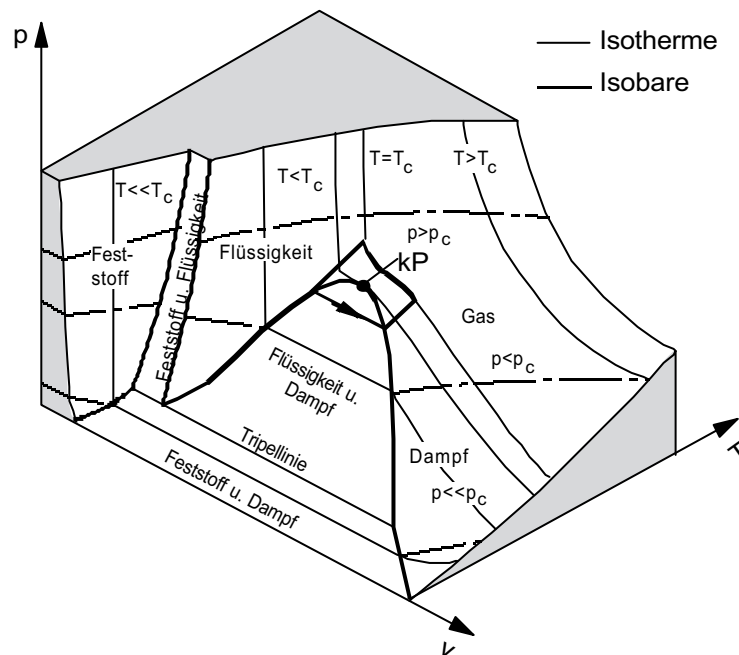
Aufgabe 5.19: *Wiederholtes Sieden*

Hinter einem Beobachtungsfenster befindet sich ein Fluid, in dem sich infolge von Wärmezufuhr Dampfblasen bilden, bis schließlich das gesamte Fluid gasförmig ist. Das Gas durchläuft einige Zustandsänderungen, bei denen jedoch kein Phasenwechsel zu beobachten ist. Nach einiger Zeit stellt man fest, dass bei Wärmezufuhr erneut Dampfblasen in dem scheinbar gasförmigen Fluid beobachtet werden. Was ist passiert? Zeichnen Sie den Prozessverlauf in ein geeignetes Diagramm ein.

Lösung: *Wiederholtes Sieden*

Das Fluid durchläuft einen Prozess, der um den kritischen Punkt herumführt. Im T - v -Diagramm könnte das beispielsweise so aussehen:

Nach Abschluss der Verdampfung wird zunächst die Temperatur isochor auf $T > T_k$ erhöht. Es folgt eine isotherme Kompression. Dabei ist Wärmeabfuhr notwendig. Sobald das Volumen kleiner ist als das kritische Volumen, ist durch isochore Abkühlung ein Eindringen ins Flüssigkeitsgebiet möglich. Ein Phasenwechsel ist dabei nicht zu beobachten. Bei Drücken und Temperaturen oberhalb des kritischen Punktes ist eine Unterscheidung zwischen Gasen und Flüssigkeiten nicht sinnvoll. Die Skizze zeigt den oben dargestellten Prozess in einem dreidimensionalen p - v - T -Diagramm. Die Aufgabenstellung ist auch mit jedem der drei Diagramme gelöst, die sich aus diesem Diagramm durch Projektion ergeben (p - v -Diagramm, p - T -Diagramm, T - v -Diagramm). Es kommt nur darauf an, dass der kritische Punkt, die Siedelinie und die Taulinie eingezeichnet sind (die beiden letzteren fallen im p - T -Diagramm zusammen) und dass der Prozess um den kritischen Punkt herumführt.



Übung 6

Aufgabe 4.6: Anwendung der Zustandsgleichung für ideale Gase

Berechnen Sie für ein ideales Gas

- die isotherme Kompressibilität,
- den thermischen Ausdehnungskoeffizienten und
- die Differenz der Wärmekapazitäten.

Lösung: Anwendung der Zustandsgleichung für ideale Gase

Anwendungen der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase:

- isotherme Kompressibilität

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

- thermischer Ausdehnungskoeffizient

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

- Differenz der Wärmekapazitäten

$$c_p - c_v = \frac{T v \beta^2}{\chi_T}$$

Auswertung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T &= -R_i T p^{-2} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p &= R_i / p \\ \chi_T &= -\frac{1}{R_i T / p} \cdot (-R_i T p^{-2}) \\ &= \frac{1}{p} \\ \beta &= \frac{1}{R_i T / p} \cdot \frac{R_i}{p} \\ &= \frac{1}{T} \\ c_p^0 - c_v^0 &= \frac{T \cdot \frac{R_i T}{p} \cdot \frac{1}{T^2}}{\frac{1}{p}} = R_i \end{aligned}$$

Dieser wichtige Zusammenhang folgt auch aus:

$$\begin{aligned}h^0(T) &= u^0(T) + pv = u + R_i T \\c_p^0 &= \left(\frac{\partial h^0}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial u^0}{\partial T}\right)_v + R_i \\&= c_v^0 + R_i\end{aligned}$$

Aufgabe 4.7: *Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur idealer Gase bei adiabatisentropen Zustandsänderungen*

Gegeben sei folgende differentielle Form der Fundamentalgleichung für die Entropie

$$Tds = dh - vdp$$

Bei den folgenden Aufgaben besitze das betrachtete Fluid die Eigenschaften des idealen Gases.

- Leiten Sie obige Beziehung aus der Gibbsschen Fundamentalgleichung her.
- Benutzen Sie die oben angegebene Fundamentalgleichung um die Änderung der spezifischen Entropie in Abhängigkeit von Temperatur und Druck herzuleiten.
- Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil b) einen Ausdruck für den Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur bei adiabatisentropen Prozessführung.

Lösung: *Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur idealer Gase bei adiabatisentropen Zustandsänderungen*

- a) Es gilt

$$\begin{aligned} du = Tds - pdv &\Rightarrow d(h - pv) = Tds - pdv \Rightarrow dh - pdv - vdp + pdv = Tds \\ &\Rightarrow Tds = dh - vdp \end{aligned}$$

- b) Division durch T und anschließende Integration ergibt

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dh}{T} - \frac{v}{T} dp = \frac{c_p^0 dT}{T} - \frac{R_i}{p} dp \\ s - s_0 &= \int_{T_0}^T \frac{c_p^0 dT}{T} - \int_{p_0}^p \frac{R_i}{p} dp = c_p^0 \ln \frac{T}{T_0} - R_i \ln \frac{p}{p_0} \end{aligned}$$

- c) Bei adiabatisentropen Prozessführung bleibt die Entropie konstant. Es gilt hier

$$s - s_0 = 0$$

Somit folgt:

$$c_p^0 \ln \frac{T}{T_0} = R_i \ln \frac{p}{p_0} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R_i}{c_p^0}}$$

Ferner gilt:

$$\frac{R_i}{c_p^0} = \frac{c_p^0 - c_v^0}{c_p^0} = \frac{c_v^0(\kappa - 1)}{c_v^0 \kappa} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

Also letztlich

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$$

Aufgabe 4.8: *Luftschiff*

Ein Luftschiff hat ein Gasvolumen von 250000m^3 . Bei einem Druck von $p_u = 0,98\text{ bar}$ und einer Temperatur von $t_u = 10^\circ\text{C}$ bleibt es auf konstanter Höhe stehen. Der Druck und die Temperatur im Inneren des Luftschiffes gleichen den Werten der Umgebungsluft. Berechnen Sie die Masse des Luftschiffes (eigene Masse + Nutzlast, ohne Masse der Gasfüllung) unter der Annahme, dass das Luftschiff

- a) mit Wasserstoff ($M_{H_2} = 2 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$)
- b) mit Helium ($M_{He} = 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$)
- c) mit Methan ($M_{CH_4} = 16 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$)
- d) mit Stickstoff ($M_{N_2} = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$)

gefüllt ist. Die molare Masse von Luft beträgt $M_{Luft} = 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

Hinweise:

Es gelte die Zustandsgleichung für ideale Gase:

$$pV = mR_iT$$

wobei R_i die spezifische Gaskonstante des Stoffes i ist. Die spezifische Gaskonstante des Stoffes i kann über die molare Masse M_i des entsprechenden Stoffes aus der allgemeinen Gaskonstanten R_m berechnet werden:

$$R_i = \frac{R_m}{M_i} \quad \text{mit} \quad R_m = 8,3143 \frac{\text{kJ}}{\text{kmolK}}$$

Lösung: *Luftschiff*

Der Stillstand des Luftschiffes bedeutet Kräftegleichgewicht, d.h. das Luftschiff inclusive Gasfüllung hat dieselbe Masse wie die Luft, die es verdrängt. Die verdrängte Luftmasse berechnet sich nach der Zustandsgleichung für ideale Gase:

$$pV = m_{Luft}R_{Luft}T = \frac{m_{Luft}R_mT}{M_{Luft}}$$
$$m_{Luft} = \frac{M_{Luft}pV}{R_mT} = 301\,802\text{ kg}$$

Die Massen der Gasfüllungen berechnen sich entsprechend:

$$m_{H_2} = \frac{M_{H_2}pV}{R_mT} = 20\,814\text{ kg}$$
$$m_{He} = 41\,628\text{ kg}$$
$$m_{CH_4} = 166\,511\text{ kg}$$
$$m_{N_2} = 291\,395\text{ kg}$$

Die Masse des Luftschiffes (Gashülle, Gestänge, Gondel, Motoren, Kraftstoffe, Nutzlast) beträgt folglich:

- a) 280 988 kg (H_2 -Füllung)
- b) 260 174 kg (He -Füllung)
- c) 135 291 kg (CH_4 -Füllung)
- d) 10 407 kg (N_2 -Füllung)

Aufgabe 7.2: Dampfturbine

Durch eine adiabate Dampfturbine strömen im stationären Betrieb $\dot{m} = 80 \frac{kg}{s}$ Wasser, das als Gas mit dem Zustand $p_1 = 70 \text{ bar}$ und $t_1 = 460^\circ\text{C}$ in die Turbine eintritt und sie mit der Temperatur $t_2 = 33^\circ\text{C}$ und dem Nassdampfgehalt $x_2 = 0,90$ verlässt.

- Welcher Druck p_2 herrscht beim Austritt aus der Turbine?
- Welche Leistung \dot{W}_t gibt die Turbine ab?
- Welche Leistung $\dot{W}_{t,rev}$ würde die Turbine beim reversibel-adiabaten Arbeitsprozess des Wassers bis zum gleichen Druck liefern?
- Wie groß ist der isentrope Turbinenwirkungsgrad η_{sT} ?
- Skizzieren Sie die reversible und die irreversible Zustandsänderung des Wassers im T - s -Diagramm!

Zustandsgrößen von überhitztem Wasserdampf bei $p = 70 \text{ bar}$ und $t = 460^\circ\text{C}$:

$$h = 3312,0 \frac{kJ}{kg} \quad s = 6,6670 \frac{kJ}{kg K}$$

Lösung: Dampfturbine

- Da im Zustand 2 ein Zweiphasengemisch vorliegt, muss man den gesuchten Wert für p_2 aus der Dampftafel ablesen. Man erhält auf diese Weise:

$$p_2 = 0,0503 \text{ bar}$$

- Zur Berechnung der Turbinenleistung muss zunächst die spezifische Enthalpie h_2 aus h' und h'' (Dampftafel bei 33°C) berechnet werden:

$$h_2 = (1 - x)h' + xh'' = 2318,6 \frac{kJ}{kg}$$

Die Turbinenleistung $\dot{W}_{t,Turb}$ ist nach dem Ersten Hauptsatz das Produkt aus dem Massenstrom und der Differenz der spezifischen Enthalpien:

$$\dot{W}_{t,Turb} = \dot{m}(h_2 - h_1) = -79,47 \text{ MW}$$

- Bei einem reversibel-adiabaten Prozess wäre die Entropie konstant. Da bei 33°C die Ungleichung $s' < s_1 < s''$ gilt, liegt der Zustand 2^* nach diese Prozess im Zweiphasengebiet. Der Dampfanteil beträgt:

$$x_{2^*} = \frac{s_1 - s'}{s'' - s'} = \frac{6,6670 - 0,4775}{8,391 - 0,4775} = 0,7821$$

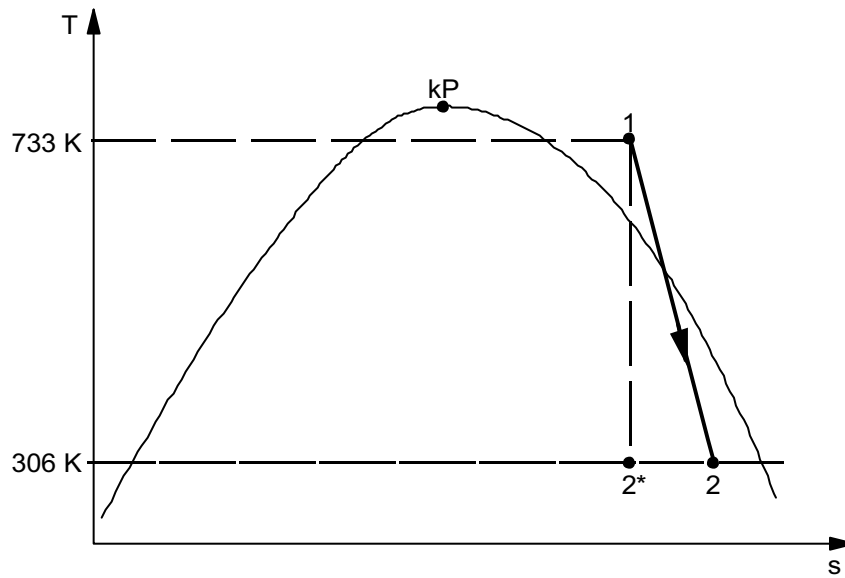
Die Enthalpie h_{2^*} beträgt:

$$\begin{aligned} h_{2^*} &= (1 - x_{2^*})h' + x_{2^*}h'' = 2033,1 \frac{kJ}{kg} \\ \Rightarrow \dot{W}_{t,Turb,rev} &= \dot{m}(h_{2^*} - h_1) = -102,31 \text{ MW} \end{aligned}$$

d) Der Turbinenwirkungsgrad beträgt also

$$\eta_{sT} = \frac{\dot{W}_t}{\dot{W}_{t,rev}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2^*} - h_1} = \frac{-79,47 \text{ MW}}{-102,31 \text{ MW}} = 0,777$$

e) Zustandsdiagramm:



Übung 7

Aufgabe 4.14: *Löffler-Kessel*

Im Löffler-Kessel findet die Verdampfung des Wassers so statt, dass hochüberhitzter Dampf bei konstantem Druck durch siedendes Wasser bei gleichem Druck geblasen wird. Der Dampf kühlt sich hierbei bis auf die Sättigungstemperatur ab und liefert so die erforderliche Verdampfungswärme.

Wieviel Dampf von $p_1 = 100 \text{ bar}$ und $t_1 = 500^\circ\text{C}$ ist zur kontinuierlichen Verdampfung von 1 kg Wasser bei 100 bar erforderlich?

Angaben

$h(500^\circ\text{C}, 100 \text{ bar}) = 3374,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ Alle übrigen Daten sind der Dampftafel zu entnehmen.

Lösung: *Löffler-Kessel*

Der Kessel ist ein adiabates System, das nur konvektive Energieströme austauscht: Dem Kessel werden $m_F = 1 \text{ kg}$ siedendes (flüssiges) Wasser sowie die Masse m_D an überhitztem Dampf zugeführt und $m_F + m_D$ Satttdampf entnommen. Erster Hauptsatz:

$$0 = m_D h + m_F h' - (m_D + m_F) h''$$

Auflösen nach m_D und Einsetzen der Werte aus der Dampftafel liefern:

$$m_D = m_F \frac{h'' - h'}{h - h''} = 2,03 \text{ kg}$$

Aufgabe 5.9: *Stickstoffbehälter*

Ein Kugelbehälter ($V = 10 \text{ m}^3$) wird mit Stickstoff N_2 (Ideales Gas, $M = 28,013 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$) gefüllt, bis beim Erreichen des Druckes $p_1 = 6 \text{ bar}$ der Füllvorgang beendet wird. Die Temperatur des Stickstoffs beträgt dabei $t_1 = 12^\circ\text{C}$. ($R_m = 8,3143 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$)

- Welche Masse m_1 an Stickstoff befindet sich im Zustand p_1, T_1 im Behälter?
- Infolge von Sonneneinstrahlung steigt die Temperatur im Behälter bei unveränderter Füllmenge auf $t_2 = 28^\circ\text{C}$ an. Wie groß ist der Druck p_2 im Behälter?
- Um diese Druckerhöhung zu vermeiden, soll sich beim Druck p_1 ein Sicherheitsventil öffnen, so dass der Druck bei der nachfolgenden Erwärmung des Stickstoffs auf die Temperatur $t_3 = t_2 = 28^\circ\text{C}$ konstant bleibt: $p_3 = p_1 = 6 \text{ bar}$.
Welche Stickstoffmenge $\Delta m = m_3 - m_1$ ist bei der Zustandsänderung vom Zustand (p_1, T_1) bis zum Zustand (p_3, T_3) durch das Sicherheitsventil entwichen?

Lösung: *Stickstoffbehälter*

- a) Es gilt

$$p_1 V = m_1 \frac{R_m}{M} T_1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{p_1 V M}{R_m T_1} = 70,9 \text{ kg}$$

- b) Es gilt

$$p_2 V = m_2 \frac{R_m}{M} T_2.$$

Mit $m_2 = m_1$ folgt $p_2 = 6,34 \text{ bar}$

- c) Mit der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase folgt jeweils

$$\begin{aligned} p_1 V &= m_1 \frac{R_m}{M} T_1 \\ p_3 V &= m_3 \frac{R_m}{M} T_3 \end{aligned}$$

wobei noch $p_3 = p_1$ und $T_3 = T_2$ gilt. Es folgt

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{T_3}{T_1} \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{m_1 - \Delta m} = \frac{T_3}{T_1}$$

Auflösen nach Δm :

$$m_1 = \frac{T_3}{T_1} m_1 - \Delta m \frac{T_3}{T_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta m = m_1 \left[1 - \frac{T_1}{T_3} \right]$$

Einsetzen ergibt schließlich:

$$\Delta m = m_1 - m_3 = 3,767 \text{ kg}$$

Aufgabe 5.13: *Abkühlung von Kohlendioxid*

In einen Wärmeaustauscher tritt ein Kohlendioxidstrom $\dot{m} = 0,05 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ mit der Temperatur $t_1 = 500^\circ\text{C}$ ein. Er wird im Wärmeaustauscher isobar auf $t_2 = 200^\circ\text{C}$ abgekühlt. Welcher Wärmestrom \dot{Q} muss dem Kohlendioxidstrom entzogen werden?

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Tabelle für die mittlere spezifische Wärmekapazität c_p^0 in $\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$ von CO_2 als Funktion der Celsius-Temperatur (aus Baehr: Thermodynamik, die Werte gelten für den Temperaturbereich von 0°C bis zur angegebenen Temperatur):

100 °C	0,8677
200 °C	0,9122
300 °C	0,9509
400 °C	0,9850
500 °C	1,0152

Lösung: *Abkühlung von Kohlendioxid*

Mittlere Wärmekapazität bei konstantem Druck für den Temperaturbereich zwischen t_1 und t_2 :

$$[c_p]_{t_1}^{t_2} = \frac{(t_2 - t_0)[c_p]_{t_0}^{t_2} - (t_1 - t_0)[c_p]_{t_0}^{t_1}}{t_2 - t_1}$$

Einsetzen von $t_1 = 500^\circ\text{C}$ und $t_2 = 200^\circ\text{C}$ sowie der Werte für $[c_p]_{0^\circ\text{C}}^{200^\circ\text{C}}$ und $[c_p]_{0^\circ\text{C}}^{500^\circ\text{C}}$ ergibt:

$$[c_p]_{t_1}^{t_2} = \frac{200 \text{ K} \cdot 0,9122 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} - 500 \text{ K} \cdot 1,0152 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}}{-300 \text{ K}} = 1083,9 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Aus dem Ersten Hauptsatz folgt für den vorliegenden Fall (keine technische Arbeit, stationärer Betrieb, keine Volumenänderung, Vernachlässigung von kinetischer und potentieller Energieänderung):

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{m}(h_1 - h_2) + \dot{Q} \\ \dot{Q} &= \dot{m}(h_2 - h_1) = \dot{m}[c_p]_{t_1}^{t_2}(t_2 - t_1) = \\ 0,05 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 1083,9 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot (200^\circ\text{C} - 500^\circ\text{C}) &= -16,258 \text{ kW} \end{aligned}$$

Der Wärmestrom \dot{Q} ist negativ, da er aus dem System hinausfließen muss.

Aufgabe 5.16: *Realer Stoff II*

- a) Der Dampfdruck von Wasser beträgt bei 100°C $p_{s,H_2O} = 1\text{atm} = 1,01325\text{bar}$. Schätzen Sie den Dampfdruck bei 105°C (Schnellkochtopf) unter folgenden Voraussetzungen ab ($R_m = 8,3143 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol K}}$):

- i) $v' \ll v'' = \frac{R_{H_2O} \cdot T}{p}$ und $M_{H_2O} = 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$
ii) $r(102,5^\circ\text{C}) = 2250 \frac{\text{J}}{\text{g}} = \text{const.}$

Auch in dem folgenden Aufgabenteil soll das spezifische Volumen der Flüssigkeit, v' , gegenüber dem des Dampfes, v'' , vernachlässigt werden ($v' \ll v''$).

Von einer unbekanntenen Flüssigkeit sind die folgenden Daten gemessen worden:

Temperatur $T_1 = 240\text{K}$; Dampfdruck $p_1(T_1) = 1,20\text{bar}$
Temperatur $T_2 = 250\text{K}$; Dampfdruck $p_2(T_2) = 1,32\text{bar}$
mittlere Verdampfungsenthalpie: $r = h'' - h' = 100 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

- b) Schätzen Sie mit diesen Angaben ab, welche Molmasse M die untersuchte Flüssigkeit besitzt.

Lösung: *Realer Stoff II*

- a) Dgl. von Clausius-Clapeyron:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{r}{v'' - v'} \approx \frac{1}{T} \frac{r}{\frac{R_m T}{M_{H_2O} p}}$$

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = \frac{r}{M_{H_2O}} \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln \frac{p_1}{p_0} = \frac{r}{M_{H_2O}} \left(-\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_0} \right)$$

Es folgt somit:

$$p_1 = p_0 \exp \left[\frac{r}{M_{H_2O}} \left(-\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_0} \right) \right] =$$
$$1,01325\text{bar} \exp \left[\frac{2250 \frac{\text{J}}{\text{g}}}{\frac{8,3143 \frac{\text{J}}{\text{gK}}}{18}} \left(-\frac{1}{378,15\text{K}} + \frac{1}{373,15\text{K}} \right) \right] = 1,204\text{bar}$$

Tafelwert: $1,208\text{bar}$

- b) Die in Aufgabenteil a) unter Vernachlässigung von v' hergeleitete Beziehung lautet:

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{r}{M} \left(-\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right)$$

Damit ist

$$M = \frac{R_m \ln \frac{p_2}{p_1}}{(h'' - h') \left(-\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right)} = 47,55 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Aufgabe 5.22: *Erwärmung von Wasser*

In einem Gefäß befinden sich $m = 2,07 \text{ kg}$ Wasser, dessen Zustand zum Zeitpunkt t_1 mit $p_1 = 1 \text{ bar}$, $t_1 = 20^\circ\text{C}$ gegeben ist. Dem Wasser wird die konstante Leistung $\dot{W}_t = 3 \text{ kW}$ zugeführt, beispielsweise durch Zufuhr von elektrischer Energie. Das Wasser erfährt dabei eine isobar verlaufende Zustandsänderung. Das Wassergefäß ist gut gegen die Umgebung isoliert.

- a) Welches Volumen V_1 hat das Wasser zum Zeitpunkt t_1 ?
- b) Nach welcher Zeit $t_2 - t_1$ erreicht das Wasser gerade den Siedezustand?
- c) Betrachten Sie den Zustand des Wassers im geschlossenen System zum Zeitpunkt $t_3 - t_1 = 20 \text{ min}$:
 - c1) Wie groß ist die spezifische Enthalpie h_3 ?
 - c2) Wie groß ist die Temperatur t_3 ?
 - c3) Wie groß ist der Nassdampfgehalt x_3 ?
 - c4) Wie groß ist das Volumen V_3 ?
 - c5) Welche Wassermenge Δm ist während des Zeitintervalls $t_3 - t_2$ von der flüssigen in die gasförmige Phase übergegangen?
- d) Nach welcher Zeit $t_4 - t_1$ ist die gesamte Wassermenge m gerade verdampft?
- e) Bestimmen Sie die spezifische Enthalpie h_5 zum Zeitpunkt $t_5 - t_1 = 30 \text{ min}$.
- f) Skizzieren Sie die Zustandsänderung des Wassers im p - T -Diagramm sowie im T - s -Diagramm des realen Stoffes.
- g) Für diesen Aufgabenteil müssen Zustandsgrößen durch lineare Interpolation bestimmt werden:
Berechnen Sie die Temperatur t_5 . Welche Volumenänderungsarbeit $W_{vol,15}$ ist vom Wasser bei der Zustandsänderung $1 \rightarrow 5$ an die Umgebung ($p_u = 1 \text{ bar}$, $t_u = 20^\circ\text{C}$) abgegeben worden?

Zustandsgrößen von Wasser und Wasserdampf bei $p = 1 \text{ bar}$:

A) Flüssigkeitsgebiet bei $t = 20^\circ\text{C}$ und 1 bar :

$$v = 1,0016 \frac{\text{dm}^3}{\text{kg}}, \quad h = 83,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, \quad s = 0,2963 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

B) Nassdampfgebiet (Phasengleichgewicht) bei $t = 99,63^\circ\text{C}$ und 1 bar :

$$v' = 1,0436 \frac{\text{dm}^3}{\text{kg}}, \quad h' = 417,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, \quad s' = 1,3022 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

$$v'' = 1694 \frac{\text{dm}^3}{\text{kg}}, \quad h'' = 2673,8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, \quad s'' = 7,3544 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

C) Gasgebiet bei $t = 110^\circ\text{C}$ und 1 bar :

$$v = 1695 \frac{\text{dm}^3}{\text{kg}}, \quad h = 2696,8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, \quad s = 7,3567 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

Lösung: *Erwärmung von Wasser*

a) Es gilt:

$$V_1 = v_1(20^\circ\text{C}; 1\text{ bar}) \cdot m = 2,07\text{ kg} \cdot 1,0016 \frac{\text{dm}^3}{\text{kg}} = 2,073 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$$

b) Erster Hauptsatz (keine kinetische bzw. potentielle Energieänderung, keine Massenströme):

$$U_2 - U_1 = W_{t,12} + Q_{12} - \int_1^2 p_u dV \Leftrightarrow$$
$$W_{t,12} + Q_{12} = U_2 - U_1 + \int_1^2 p_u dV = U_2 + p_u V_2 - U_1 - p_u V_1 = m(h_2 - h_1)$$

wobei gilt:

$$Q_{12} = 0 \quad \text{und} \quad W_{t,12} = \dot{W}_t \cdot (t_2 - t_1)$$

Es folgt:

$$\dot{W}_t \cdot (t_2 - t_1) = m(h_2 - h_1) \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{m(h_2 - h_1)}{\dot{W}_t}$$

Mit

$$h_2 = h'(99,63^\circ\text{C}, 1\text{ bar}) = 417,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad \text{und} \quad h_1 = h(20^\circ\text{C}, 1\text{ bar}) = 83,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

ergibt sich

$$t_2 - t_1 = 230\text{ s} = 3\text{ min } 50\text{ s}$$

c) Es gilt

$$W_{t,13} = \dot{W}_t(t_3 - t_1) = m(h_3 - h_1)$$

c1)

$$h_3 = \frac{\dot{W}_t}{m}(t_3 - t_1) + h_1 = 1823,03 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

c2) Die Enthalpie h_3 ist größer als h' , aber kleiner als h'' bei der Siedetemperatur. Folglich liegen beide Phasen vor, und es gilt $t_3 = 99,63^\circ\text{C}$.

c3) Es gilt:

$$h_3 = x_3 \cdot h_3'' + (1 - x_3) \cdot h_3' \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{h_3 - h_3'}{h_3'' - h_3'} = 0,623$$

c4) Es gilt:

$$V_3 = m \cdot v_3 = m [x_3 \cdot v_3'' + (1 - x_3) \cdot v_3'] = 2,185\text{ m}^3$$

c5) $\Delta m = (x_3 - x_2) \cdot m = 1,290\text{ kg}$ mit $x_2 = 0$ (siedende Flüssigkeit)

d) Mit

$$W_{t,14} = \dot{W}_t \cdot (t_4 - t_1) = m(h_4 - h_1) \quad \text{und} \quad h_4 = h''(99,63^\circ\text{C}, 1\text{ bar}) = 2673,8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

folgt

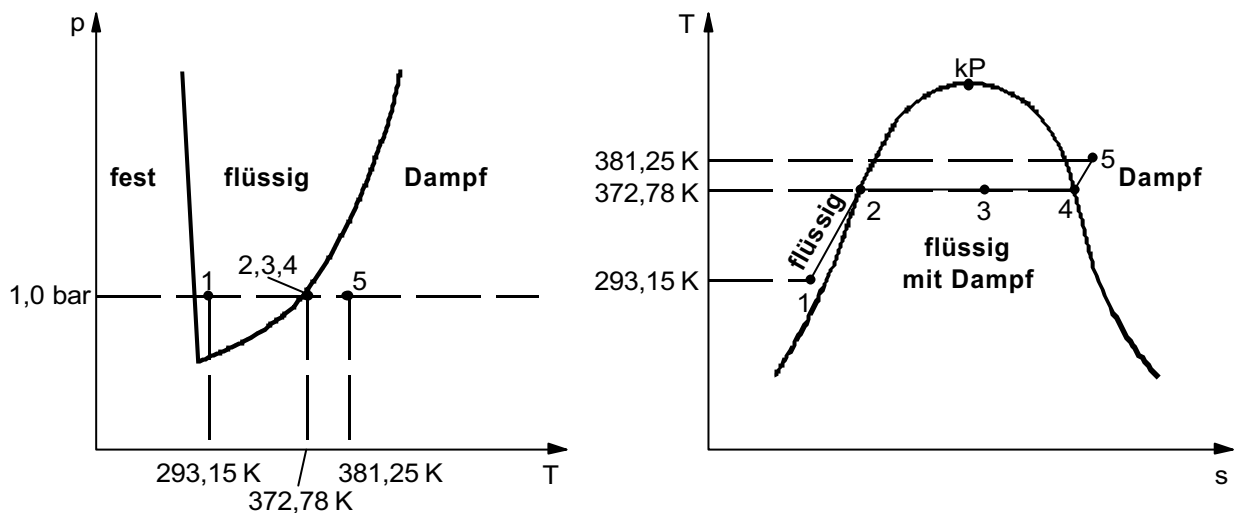
$$t_4 - t_1 = \frac{m(h_4 - h_1)}{\dot{W}_t} = 29 \text{ min } 47 \text{ s}$$

e) Es gilt erneut:

$$W_{t,15} = \dot{W}_t \cdot (t_5 - t_1) = m(h_5 - h_1)$$

$$h_5 = \frac{\dot{W}_t}{m} (t_5 - t_1) + h_1 = 2692,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

f) Grafische Darstellung:



g) Man gewinnt t_5 durch lineare Interpolation zwischen $t_s = 99,63^\circ\text{C}$ und $t_6 = 110^\circ\text{C}$:

$$t_5 = t_s + (t_6 - t_s) \frac{h_5 - h_s''}{h_6 - h_s''} = 108,10^\circ\text{C}$$

Es gilt:

$$W_{vol,15} = - \int_1^5 p_u dV = -m p_u (v_5 - v_1)$$

Für v_5 gilt:

$$v_5 = v_s'' + (v_6 - v_s'') \frac{h_5 - h_s''}{h_6 - h_s''} = 1694,82 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Es ergibt sich: $W_{vol,15} = -350,62 \text{ kJ}$

Übung 8

Aufgabe 5.2: *Carnot-Prozess*

Der Carnot-Prozess ist ein Vergleichsprozess zur Klassifizierung der Güte eines realen Prozesses.

- a) Wie ist der Carnot-Faktor η_C definiert?
- b) Welche Zustandsänderungen werden beim idealen Carnot-Prozess durchlaufen?

Lösung: *Carnot-Prozess*

- a) Ist Q die vom Warmkörper bei der Temperatur T gelieferte Wärme, Q_0 die an den Kaltkörper bei der Temperatur T_0 abgeführte Wärme und W_t die geleistete Arbeit, so folgt für den Carnot-Faktor:

$$\eta_C = \frac{|W_t|}{|Q|} = \frac{|Q| - |Q_0|}{|Q|} = 1 - \frac{|Q_0|}{|Q|} = 1 - \frac{T_0}{T}$$

- b) Beim idealen Carnot-Prozess werden zwei adiabat/isentrope und zwei isotherme Zustandsänderungen durchlaufen (Rechteck im T-S-Diagramm!).

Aufgabe 5.3: *Carnot-Schiff*

In der Region des Nordmeeres liegt die Wassertemperatur zumeist über der Temperatur der Umgebungsluft. Ein Schiff soll die Temperaturdifferenz zwischen diesen beiden Wärmebädern ausnutzen und mit Hilfe eines idealen Carnot-Prozesses angetrieben werden. Die Wassertemperatur betrage $t_w = 1^\circ C$ und die Lufttemperatur $t_l = -20^\circ C$. Das Wärmebad Wasser gebe den Wärmestrom \dot{Q}_w an die Carnot-Maschine des Schiffes ab, die wiederum den Wärmestrom \dot{Q}_l an die Umgebungsluft abführt.

- a) Wie groß muss der Wärmestrom \dot{Q}_w sein, damit ein mittelgroßes Frachtschiff mit einer Antriebsleistung von $\dot{W}_t = 30000 kW$ betrieben werden kann?

Ein Plattenwärmeübertrager besitze folgenden Wärmeübergangskoeffizienten:

$$\alpha = 1 \frac{kW}{Km^2} \quad \text{und es gilt} \quad \dot{Q} = \alpha \cdot \Delta T_{HX} A_{HX}.$$

Der Wärmeübergang verbessert sich also mit zunehmender Plattenfläche A_{HX} und mit zunehmender treibender Temperaturdifferenz ΔT_{HX} .

- b) Welche Optimierungsprobleme ergeben sich hinsichtlich der Auslegung des Wärmeübertragers (Heat-eXchanger HX)?
- c) Wie groß müsste die Fläche des wasserseitigen Wärmeübertragers sein $A_{HX,w}$, um den Wärmestrom unter a) bei einer treibenden Temperaturdifferenz von $\Delta T = 5K$ bereitzustellen? Wie groß ist der Entropiestrom $\dot{S}_{HX,w}$, der dem System hierdurch zugeführt wird?
- d) Wie groß muss die Fläche des luftseitigen Wärmeübertragers $A_{HX,l}$ sein, um den Entropiestrom von c) bei einer treibenden Temperaturdifferenz von $\Delta T = 5K$ wieder abführen zu können?
- e) Welche Antriebsleistung verbleibt?
- f) Wie groß sind Antriebsleistung \dot{W}_t und Wärmeübertragerflächen $A_{HX,w}$ und $A_{HX,l}$, wenn man als treibende Temperaturdifferenz $\Delta T = 1K$ wählt?

Lösung: *Carnot-Schiff*

- a) Der Carnot-Faktor berechnet sich zu

$$\eta_C = 1 - \frac{253,15K}{274,15K} = 0,0766$$

Somit ergibt sich als zuzuführender Wärmestrom

$$\dot{Q}_w = \frac{\dot{W}_t}{\eta_C} = \frac{30000kW}{0,0766} = 391642kW$$

- b) Um den übertragenen Wärmestrom zu erhöhen, kann man sowohl die Fläche des Wärmeübertragers erhöhen als auch die den Wärmeübergang treibende Temperaturdifferenz. Vergrößert man die Übertragerfläche, so kann man den Prozess zwar mit kleineren Temperaturdifferenzen betreiben, was die Irreversibilitäten beim Wärmeübergang reduziert, man benötigt gleichzeitig aber auch mehr Material und mehr Raum für den Wärmeübertrager. Andererseits kann man mit hohen Temperaturdifferenzen zwar kompakte Wärmeübertrager bauen, erhöht aber gleichzeitig die durch Irreversibilitäten hervorgerufene Entropieproduktion.
- c) Mit dem angegebenen Wärmeübergangskoeffizienten α ergibt sich:

$$A_{HX,w} = \frac{\dot{Q}_w}{\alpha \cdot \Delta T} = 78328 m^2.$$

Da die Temperaturdifferenz von $5K$ dazu führt, dass der in das System fließende Wärmestrom die Kontrollvolumengrenze bei $T_w - 5K = 269,15K$ passiert, ergibt sich für den Entropiestrom

$$\dot{S}_w = \frac{\dot{Q}_w}{T_w - 5K} = \frac{391642 kW}{269,15K} = 1455 \frac{kW}{K}.$$

- d) Da die Temperaturdifferenz auch in diesem Fall $5K$ beträgt, muss der die Entropie transportierende Wärmestrom bei $T_l + 5K$ abgegeben werden

$$\dot{S}_l = -\dot{S}_w = \frac{\dot{Q}_l}{T_l + 5K} = \frac{\alpha \cdot A_{HX,l} \Delta T}{T_l + 5K} \Rightarrow A_{HX,l} = -\frac{\dot{S}_w \cdot (T_l + 5K)}{\alpha \Delta T} = 75121 m^2.$$

- e) Der über den luftseitigen Wärmeübertrager abgegebene Wärmestrom \dot{Q}_l berechnet sich zu

$$\dot{Q}_l = \alpha \cdot A_{HX,l} \cdot \Delta T = 375605 kW.$$

Somit steht für die technische Arbeit \dot{W}_t noch folgender Energiestrom zur Verfügung

$$-\dot{W}_t = \dot{Q}_w - \dot{Q}_l = 16037 kW.$$

- f) Es ergeben sich folgende Werte:

$$A_{HX,w} = 391642 m^2 \quad A_{HX,l} = 364451 m^2 \quad -\dot{W}_t = 27191 kW.$$

Aufgabe 5.5: *Kühlung eines realen Kernkraftwerkes*

Ein reales Kernkraftwerk erreicht einen Wirkungsgrad von 0,33 und gibt $1,3 \cdot 10^9 W$ elektrische Leistung ab. Die Wärmeproduktion im Reaktor erfolgt bei $t_R = 320^\circ C$. Die Wärmeabgabe erfolgt bei einer Temperatur von $t_{ab} = 27^\circ C$ über einen Kühlturm.

- Welcher Kühlwasserbedarf besteht an einem Sommertag, wenn die Kühlleistung \dot{Q}_K ausschließlich durch Wasserverdunstung bereitgestellt wird?
- Berechnen Sie die Entropieproduktion im Reaktor sowie die Entropieproduktion der Wärmekraftmaschine des realen Kernkraftwerkes. Zeichnen Sie dazu eine Skizze der beiden Systeme und wählen Sie jeweils einen Kontrollraum.

Hinweis:

Verdampfungsenthalpie von Wasser r bei etwa $20^\circ C$: $2453,3 \frac{kJ}{kg}$

Lösung: *Kühlung eines realen Kernkraftwerkes*

- Die Wärmekraftmaschine nimmt vom Reaktor folgenden Wärmestrom auf:

$$\dot{Q}_R = \frac{\dot{W}_t}{\eta} = \frac{1,3 \cdot 10^9 W}{0,33} = 3939,39 MW$$

Der Abwärmestrom beträgt:

$$|\dot{Q}_K| = (1 - \eta)\dot{Q}_R = 2639,39 MW$$

Der Kühlwasserbedarf an Sommertagen berechnet sich aus der Verdampfungsenthalpie r :

$$\dot{m}r = \dot{Q}_K \Rightarrow \dot{m} = 1076 \frac{kg}{s}$$

Ein großes Kernkraftwerk verdampft also an einem heißen Tag etwa eine Tonne Wasser je Sekunde. Aus diesem Grund müssen Kernkraftwerke in der Nähe von großen Flüssen stehen. Sollten mehrere Kraftwerke an einem Fluss stehen, so sind manchmal Talsperren am Oberlauf erforderlich, die bei Trockenheit das Niedrigwasser auffüllen (z.B. an der Loire in Frankreich). Dasselbe Problem ergibt sich natürlich auch bei anderen Wärmekraftwerken - allerdings ist der Kühlwasserbedarf je Kilowattstunde Strom wegen des höheren Wirkungsgrades (0,38 bis 0,55 wegen höherer Verbrennungstemperatur) sowie aufgrund des Umstandes, dass ein Teil der produzierten Entropie mit dem Abgas abgegeben wird, erheblich kleiner.

- Die Entropiebilanz des Reaktors lautet: (\dot{Q}_R ist bei Betrachtung dieses Systems negativ)

$$-\frac{|\dot{Q}_R|}{T_R} + \dot{S}_{prod,R} = 0 \Rightarrow \dot{S}_{prod,R} = \frac{3939,39 MW}{593,15 K} = 6,6415 \frac{MW}{K}$$

Die Entropiebilanz der Wärmekraftmaschine lautet, da \dot{Q}_R positiv, \dot{Q}_K dagegen negativ gezählt wird:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{|\dot{Q}_R|}{T_R} - \frac{|\dot{Q}_K|}{T_K} + \dot{S}_{prod,WKM} \Rightarrow \\ \dot{S}_{prod,WKM} &= \frac{2639,39 MW}{300,15 K} - 6,6415 \frac{MW}{K} = 2,1521 \frac{MW}{K} \end{aligned}$$

Übung 9

Aufgabe 5.12: *Kompression von Luft*

Durch einen Kolbenkompressor sollen $\dot{m} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$ Druckluft von $p_2 = 12 \text{ bar}$ zur Verfügung gestellt werden. Der Zustand der angesaugten Außenluft beträgt $p_1 = 1,0 \text{ bar}$ und $t_1 = 15^\circ\text{C}$.

Wie groß ist der Leistungsbedarf für die Durchführung der Kompression, wenn sie

- isotherm,
- adiabat/isentrop oder
- polytrop mit $n = 1,3$

erfolgt? Geben Sie darüberhinaus die Endtemperaturen und den abzuführenden Wärmestrom für jeden der drei Fälle an.

Hinweis:

Die Luft soll als ideales Gas ($R_{Luft} = 287,1 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$, $\kappa = 1,4$) mit konstanter spezifischer Wärmekapazität c_v angesehen werden.

Lösung: *Kompression von Luft*

- a) Für die isotherme Kompression gilt $T_1 = T_{2a}$. Somit folgt für das ideale Gas Luft:

$$u_2 - u_1 = 0 = \underbrace{h_2 - h_1}_0 + q_{12a} + w_{t,12a}$$

Technische Arbeit des Verdichters:

$$w_{t,12a} = \int_1^{2a} v dp = R_{Luft} \underbrace{T_1}_{=T_{2a}} \int_1^{2a} \frac{dp}{p} = R_{Luft} T_1 \ln \frac{p_{2a}}{p_1} = 205,571 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = -q_{12a}$$

Die von dem System abgegebene Wärme ist in diesem Fall also dem Betrage nach gleich der zugeführten technischen Arbeit, die sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{t,12a} &= \dot{m} w_{t,12} = 45,68 \text{ kW} \\ \dot{Q}_{12a} &= \dot{m} q_{12a} = -45,68 \text{ kW} \end{aligned}$$

- b) Endtemperatur der isentropen Kompression T_{2b} :

$$T_{2b} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 288,15 \text{ K} \cdot 12^{\frac{0,4}{1,4}} = 586,08 \text{ K}$$

Da der Prozess adiabat verläuft gilt:

$$\dot{Q}_{12b} = 0.$$

Technische Arbeit nach dem Ersten Hauptsatz:

$$w_{t,12b} (= \kappa \cdot w_{vol,12b}) = c_p (T_{2b} - T_1) = \frac{7 R_{Luft}}{2} (T_{2b} - T_1) = 299,375 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Der Leistungsbedarf des Verdichters errechnet sich hiermit zu

$$\dot{W}_{t,12b} = \dot{m} w_{t,12b} = 66,53 \text{ kW}.$$

- c) Die Berechnung der Endtemperatur T_{2c} und der aufzubringenden Leistung $\dot{W}_{t,12c}$ bei der polytropen Zustandsänderung geschieht analog der adiab/isentropen Zustandsänderung unter Verwendung des Polytropenexponenten n anstelle von κ .

$$T_{2c} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = 288,15 \text{ K} \cdot 12^{\frac{0,3}{1,3}} = 511,28 \text{ K}$$

Technische Arbeit:

$$w_{t,12c}(= n \cdot w_{vol,12c}) = \frac{n}{n-1} R_{Luft} (T_{2c} - T_1) = 277,596 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Der Leistungsbedarf des Verdichters errechnet sich für die polytrope Zustandsänderung zu

$$\dot{W}_{t,12c} = \dot{m} w_{t,12c} = \dot{m} \frac{n}{n-1} R_{Luft} (T_{2c} - T_1) = 61,688 \text{ kW}$$

Übertragene Wärme bei polytropen Zustandsänderungen mit idealen Gasen:

$$q_{12c} = -w_{t,12c} + c_p(T_{2c} - T_1) = -w_{t,12c} + \frac{7R_{Luft}}{2}(T_{2c} - T_1) = -53,384 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\dot{Q}_{12c} = \dot{m} q_{12c} = -11,863 \text{ kW}.$$

Vergleicht man nun die Ergebnisse, so sieht man, dass $T_{2a} < T_{2c} < T_{2b}$ gilt. Die isotherme Kompression verursacht selbstverständlich die niedrigste und die adiab/isentropen Kompression die größte Temperaturänderung. Für die Antriebsleistungen des Verdichters gilt entsprechend $\dot{W}_{t,12a} < \dot{W}_{t,12c} < \dot{W}_{t,12b}$. Daher ist für eine Kompression die isotherme Zustandsänderung die wünschenswerteste (jedenfalls dann, wenn die Temperaturerhöhung des Gases bedeutungslos oder gar unerwünscht ist), während in der Realität Kompressionen eher adiab/isentrop verlaufen, also gemäß der Zustandsänderung, welche die höchste Antriebsleistung beansprucht.

Aufgabe 6.3: Wärmepumpe

Eine Wärmepumpe nimmt im stationären Betrieb aus der Umgebung ($T_u = 280K$) den Wärmestrom $\dot{Q}_u = 42kW$ auf und fördert ihn unter Aufnahme eines Stroms an technischer Arbeit $\dot{W}_t = 28kW$ auf die Heiztemperatur von $T_1 = 350K$.

- Welcher Wärmestrom \dot{Q}_H wird an die Heizung abgegeben?
- Welchen Arbeitsverluststrom $\dot{W}_{V,irr}$ (Exergieverluststrom) tritt in der Anlage auf?
- Welchen Heizwärmestrom $\dot{Q}_H|_{rev}$ und welche Antriebsleistung $\dot{W}_t|_{rev}$ würde man erhalten, wenn die Anlage bei unverändertem Wärmestrom \dot{Q}_u und gleichbleibenden Temperaturen T_1 und T_u reversibel (verlustfrei) arbeiten würde?
- Warum ist der Mehraufwand $\dot{W}_t - \dot{W}_t|_{rev} = \dot{\Psi}$ (im System in Wärme dissipierte Arbeit) größer als der Arbeitsverlust $\dot{W}_{V,irr}$?

Lösung: Wärmepumpe

- a) Energiebilanz:

$$0 = \dot{Q}_H + \dot{Q}_u + \dot{W}_t \Rightarrow \dot{Q}_H = -\dot{Q}_u - \dot{W}_t = -42kW - 28kW = -70kW$$

Da $\dot{Q}_H < 0$ ist, wird die Energie von der Wärmepumpe abgegeben.

- b) Es gilt:

$$W_{V,irr} = T_u \cdot S_{prod}$$

Die Entropiebilanz lautet somit:

$$0 = \frac{\dot{Q}_H}{T_1} + \frac{\dot{Q}_u}{T_u} + \dot{S}_{prod} \Rightarrow \dot{S}_{prod} = -\frac{-70kW}{350K} - \frac{42kW}{280K} = 0,05 \frac{kW}{K}$$

$$\dot{W}_{V,irr} = 280K \cdot 0,05 \frac{kW}{K} = 14kW$$

- c)

$$0 = \frac{\dot{Q}_H|_{rev}}{T_1} + \frac{\dot{Q}_u}{T_u} + \underbrace{0}_{rev} \Rightarrow \dot{Q}_H|_{rev} = -\frac{350K}{280K} \cdot 42kW = -52,5kW$$

$$\dot{W}_t|_{rev} = -\dot{Q}_H|_{rev} - \dot{Q}_u = 52,5kW - 42kW = 10,5kW$$

- d)

$$\dot{W}_t - \dot{W}_t|_{rev} = 17,5kW > \dot{W}_{V,irr} = 14kW,$$

da durch die WKM wegen $T > T_u$ ein Teil der in Wärme dissipierten Arbeit in nutzbare Arbeit umgewandelt werden könnte.

Aufgabe 6.4: *Unterdruckkammer*

In einer Unterdruckkammer ($V = 2m^3$) befindet sich Luft vom Zustand $p_1 = p_u = 1bar$, $T_1 = T_u = 300K$. Zum Zeitpunkt t_1 wird eine Vakuumpumpe eingeschaltet, die mit einer konstanten Antriebsleistung $\dot{W}_t = 100W$ die Luft aus der Kammer absaugt und in die Umgebung fördert.

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \text{spezifische innere Energie:} & \quad u - u_0 = 0,713 \frac{kJ}{kgK} (T - T_0) \\ \text{spezifische Entropie:} & \quad s - s_0 = 1 \frac{kJ}{kgK} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - 0,287 \frac{kJ}{kgK} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \\ \text{thermische Zustandsgleichung:} & \quad p \cdot V = m \cdot R_i \cdot T \text{ mit } R_i = 0,287 \frac{kJ}{kgK} \end{aligned}$$

- Wie groß ist die Exergie $-W_{ex}(p_1, T_1)$ der Luft im Behälter?
- Welche Luftmenge $\Delta m = m_2 - m_1$ muss aus der Kammer entfernt werden, damit dort zum Zeitpunkt t_2 ein Zustand $T_2 = 300K, p_2 = 100mbar$ besteht?
- Wie groß ist die Exergie $-W_{ex}(p_2, T_2)$ der Luft im Unterdruckbehälter zum Zeitpunkt t_2 ?
- Nach welcher Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ kann dieser Zustand bestenfalls erreicht werden?

Lösung: *Unterdruckkammer*

Exergie eines geschlossenen Systems (Exergie der inneren Energie)

$$-W_{ex} = U_1 - U_u + p_u (V_1 - V_u) - T_u (S_1 - S_u)$$

a)

$$-W_{ex}(p_1, T_1) = 0, \text{ da } p_1 = p_u \text{ und } T_1 = T_u$$

b)

$$m_1 = \frac{p_1 V_1}{R_i T_1}; \quad m_2 = \frac{p_2 V_2}{R_i T_2} \text{ mit } V_1 = V_2 = 2m^3 \text{ und } T_1 = T_2 = 300K$$

$$\begin{aligned} \Delta m = m_2 - m_1 &= \frac{V_1}{R_i T_1} (p_2 - p_1) = \\ &= \frac{2m^3}{0,287 \frac{kJ}{kgK} \cdot 300K} (0,1 - 1)bar \frac{10^5 \frac{N}{m^2}}{bar} \frac{J}{Nm} \frac{kJ}{10^3 J} = -2,091kg \end{aligned}$$

c)

$$-W_{ex}(p_2, T_2) = U_2 - U_u + p_u (V_2 - V_u) - T_u (S_2 - S_u)$$

mit

$$U_2 - U_u = m_2 (u_2 - u_u) = 0$$

$$p_u (V_2 - V_u) = p_u m_2 (v_2 - v_u) = p_u m_2 \left(\frac{R_i T_2}{p_2} - \frac{R_i T_u}{p_u} \right) = p_2 V_2 \left(\frac{p_u}{p_2} - 1 \right) =$$

$$0.1 \text{bar} \cdot 2 \text{m}^3 \left(\frac{1 \text{bar}}{0.1 \text{bar}} - 1 \right) = 1.8 \text{bar} \cdot \text{m}^3 \frac{10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{JkJ}}{10^3 \text{barNmJ}} = 180 \text{kJ}$$

Vorab:

$$m_2 = \frac{p_2 V_2}{R_i T_2} = \frac{0.1 \text{bar} \cdot 2 \text{m}^3}{287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 300 \text{K}} \frac{10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{J}}{\text{barNm}} = 0.2323 \text{kg}$$

$$T_u m_2 (s_2 - s_u) = 300 \text{K} \cdot 0.2323 \text{kg} \left[1 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \ln \left(\frac{300 \text{K}}{300 \text{K}} \right) - \right.$$

$$\left. 0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \ln \left(\frac{0.1 \text{bar}}{1 \text{bar}} \right) \right] = 46.5 \text{kJ}$$

$$\Rightarrow -W_{ex}(p_2, T_2) = 180 \text{kJ} - 46.5 \text{kJ} = 133.5 \text{kJ}$$

d) Bestenfalls ist gleichbedeutend mit reversibler Prozessführung:

$$-W_{ex}(p_2, T_2) = -W_t|_{rev} = -\dot{W}_t \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{133.5 \text{kJ}}{100 \text{W}} \frac{10^3 \text{J}}{\frac{\text{J}}{\text{s}} \text{kJ}} \frac{\text{min}}{60 \text{s}} = 22.33 \text{min}$$

Aufgabe 6.5: *Turboverdichter*

In einem Turboverdichter werden $\dot{m} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ Luft vom Umgebungszustand $p_u = 1 \text{bar}$, $T_u = 298,15 \text{K}$ (25°C) isotherm ($T_1 = T_u = \text{const.}$) auf $p_1 = 6 \text{bar}$ verdichtet.

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\text{spezifische Enthalpie: } h - h_0 = 1 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} (T - T_0)$$

$$\text{spezifische Entropie: } s - s_0 = 1 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)$$

Welche Antriebsleistung $\dot{W}_t|_{\min}$ ist dem Verdichter mindestens zuzuführen?

Lösung: *Turboverdichter*

Exergiebilanz liefert $\dot{W}_t|_{\min}$ bei Aufnahme von Arbeit

$$\Rightarrow +\dot{W}_{ex} = \dot{m} [h_1 - h_u - T_u (s_1 - s_u)] = +\dot{W}_t|_{\min}$$

Das positive Vorzeichen rührt von der Richtung der Integration $u \rightarrow 1$ her ($\dot{m}_{ein} > 0$; $\dot{m}_{aus} < 0$).

Es folgt schließlich für $\dot{W}_t|_{\min}$:

$$\dot{W}_t|_{\min} = +1 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \left[0 - 298,15 \text{K} \left(0 - 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \ln \left(\frac{6}{1} \right) \right) \right] = +153,3 \text{kW}$$

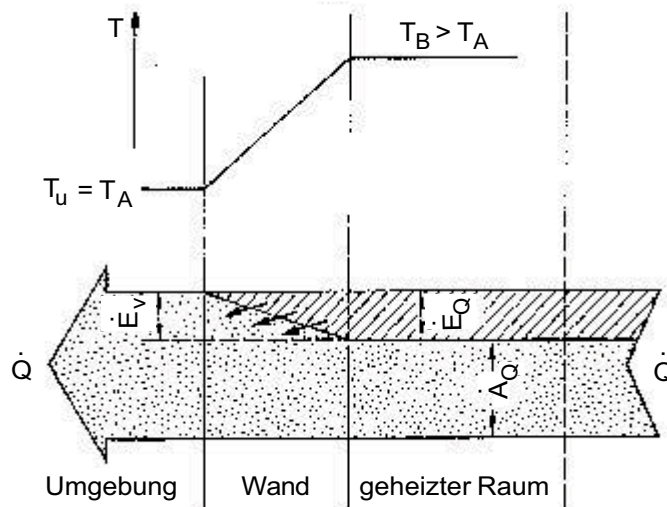
Aufgabe 6.6: *Wärmestrom durch eine Wand*

Als Grundlage für diese Aufgabe betrachten Sie die Aufgabenstellung von Aufgabe 3.10: *Entropieproduktion durch Wärmeleitung*

- Zeichnen Sie ein Exergie-Anergieflussbild für den in Aufgabe 3.10 beschriebenen Wärmestrom durch eine Wand.
- Berechnen Sie sowohl den in die Wand eintretenden Exergiestrom $\dot{E}_{Q_{ein}}$ als auch den aus der Wand austretenden Exergiestrom $\dot{E}_{Q_{aus}}$ und die zugehörigen Anergieströme $\dot{A}_{Q_{ein}}$ und $\dot{A}_{Q_{aus}}$.
- Wie groß ist der Arbeitsverlust durch Irreversibilitäten? Verwenden Sie zwei unterschiedliche Berechnungsverfahren und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung: *Wärmestrom durch eine Wand*

- Exergie-Anergie-Flussbild



- Ein Wärmestrom kann entsprechend der Umgebungstemperatur T_u in Anergie und Exergie unterteilt werden:

$$\dot{Q}_1 = \dot{E}_{Q_1} + \dot{A}_{Q_1} \quad \text{mit} \quad \dot{E} = -\dot{W}_{ex} > 0 \quad .$$

Die Exergie- und Anergieströme sind folgendermaßen definiert:

$$\dot{E}_{Q_1} = -\dot{W}_{ex} = \left(1 - \frac{T_u}{T_1}\right) \dot{Q}_1 \quad \text{und} \quad \dot{A}_{Q_1} = \dot{Q}_1 - \dot{E}_{Q_1} = \dot{Q}_1 \frac{T_u}{T_1}$$

Folglich strömt der Anergiefluss immer in die gleiche Richtung wie der zugehörige Wärmestrom. Bei der Exergie stimmt dies nur, wenn das Temperaturniveau der Wärmeübertragung oberhalb der Umgebungstemperatur liegt und der Carnot-Faktor positiv ist. Wird der Wärmestrom bei einer Temperatur unterhalb der Umgebungstemperatur übertragen, wie es in Kältemaschinen vorkommt, so strömt der Exergiestrom dem Wärmestrom entgegen.

Für die Exergie- und Anergieströme in die Wand hinein gilt:

$$\dot{E}_{Q_{ein}} = \left(1 - \frac{T_u}{T_B}\right) \dot{Q}_{ein} = 0,8385kW$$

$$\dot{A}_{Q_{ein}} = \dot{Q}_{ein} \frac{T_u}{T_B} = 9,1615kW$$

Für die Exergie- bzw. Anergieströme aus der Wand heraus ergibt sich analog:

$$\dot{E}_{Q_{aus}} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{A}_{Q_{aus}} = 10kW$$

c) Der Arbeitsverlust durch Irreversibilitäten kann einmal über die Entropieproduktion

$$\dot{W}_{Virr} = T_u \dot{S}_{prod} = T_u \dot{Q}_{ein} \frac{T_A - T_B}{T_A T_B} = 0,8385kW$$

oder über die Exergiedifferenz der ein- und austretenden Wärmeströme

$$\dot{W}_{Virr} = |\dot{E}_{ein}| - |\dot{E}_{aus}| = 0,8385kW$$

berechnet werden.

Übung 10

Aufgabe 7.2: Dampfturbine

Durch eine adiabate Dampfturbine strömen im stationären Betrieb $\dot{m} = 80 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ Wasser, das als Gas mit dem Zustand $p_1 = 70 \text{ bar}$ und $t_1 = 460^\circ\text{C}$ in die Turbine eintritt und sie mit der Temperatur $t_2 = 33^\circ\text{C}$ und dem Nassdampfgehalt $x_2 = 0,90$ verlässt.

- Welcher Druck p_2 herrscht beim Austritt aus der Turbine?
- Welche Leistung \dot{W}_t gibt die Turbine ab?
- Welche Leistung $\dot{W}_{t,rev}$ würde die Turbine beim reversibel-adiabaten Arbeitsprozess des Wassers bis zum gleichen Druck liefern?
- Wie groß ist der isentrope Turbinenwirkungsgrad η_{sT} ?
- Skizzieren Sie die reversible und die irreversible Zustandsänderung des Wassers im T - s -Diagramm!

Zustandsgrößen von überhitztem Wasserdampf bei $p = 70 \text{ bar}$ und $t = 460^\circ\text{C}$:

$$h = 3312,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad s = 6,6670 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

Lösung: Dampfturbine

- Da im Zustand 2 ein Zweiphasengemisch vorliegt, muss man den gesuchten Wert für p_2 aus der Dampftafel ablesen. Man erhält auf diese Weise:

$$p_2 = 0,0503 \text{ bar}$$

- Zur Berechnung der Turbinenleistung muss zunächst die spezifische Enthalpie h_2 aus h' und h'' (Dampftafel bei 33°C) berechnet werden:

$$h_2 = (1 - x)h' + xh'' = 2318,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Die Turbinenleistung $\dot{W}_{t,Turb}$ ist nach dem Ersten Hauptsatz das Produkt aus dem Massenstrom und der Differenz der spezifischen Enthalpien:

$$\dot{W}_{t,Turb} = \dot{m}(h_2 - h_1) = -79,47 \text{ MW}$$

- Bei einem reversibel-adiabaten Prozess wäre die Entropie konstant. Da bei 33°C die Ungleichung $s' < s_1 < s''$ gilt, liegt der Zustand 2* nach diese Prozess im Zweiphasengebiet. Der Dampfanteil beträgt:

$$x_{2*} = \frac{s_1 - s'}{s'' - s'} = \frac{6,6670 - 0,4775}{8,391 - 0,4775} = 0,7821$$

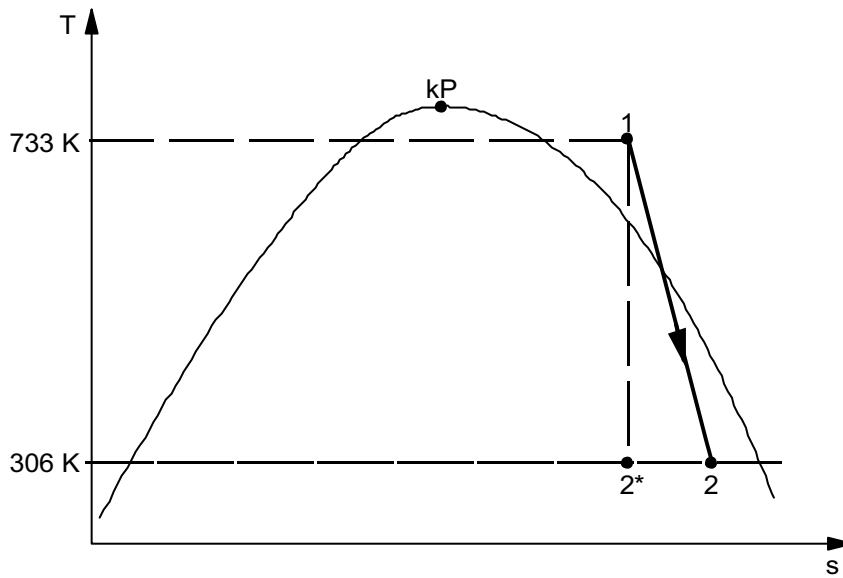
Die Enthalpie h_{2*} beträgt:

$$\begin{aligned} h_{2*} &= (1 - x_{2*})h' + x_{2*}h'' = 2033,1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\ \Rightarrow \dot{W}_{t,Turb,rev} &= \dot{m}(h_{2*} - h_1) = -102,31 \text{ MW} \end{aligned}$$

d) Der Turbinenwirkungsgrad beträgt also

$$\eta_{sT} = \frac{\dot{W}_t}{\dot{W}_{t,rev}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2^*} - h_1} = \frac{-79,47 \text{ MW}}{-102,31 \text{ MW}} = 0,777$$

e) Zustandsdiagramm:



Aufgabe 7.4: *Verdichtungsverhältnis beim Otto-Prozess*

In einem Ottomotor soll nach der isentropen Verdichtung eine Temperatur von $t_2 = 490^\circ\text{C}$ bei einer Anfangstemperatur von $t_1 = 30^\circ\text{C}$ erreicht werden. Bei einer höheren Temperatur droht die Selbstzündung des Brennstoffgemisches. Das Arbeitsmittel soll als ideales Gas mit konstanter spezifischer Wärmekapazität und $\kappa = 1,4$ angesehen werden.

Welches Verdichtungsverhältnis ϵ muss gewählt werden?

Lösung: *Verdichtungsverhältnis beim Otto-Prozess*

Es gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{763,15\text{ K}}{303,15\text{ K}} = \epsilon^{\kappa-1} = \epsilon^{0,4}$$

Somit folgt:

$$\epsilon = \sqrt[0,4]{\frac{T_2}{T_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2,5} = 10,06$$

Aufgabe 7.5: *Vergleich von Otto- und Diesel-Prozess*

Von einem Ottomotor sind folgende Daten bekannt:

Verdichtungsverhältnis: $\epsilon_{Otto} = 10$

Anfangszustand: $T_1 = 343\text{ K}$ $p_1 = 1\text{ bar}$

höchste Temperatur: $T_3 = 1973\text{ K}$

Arbeitsmittel: Luft ($c_p = \text{const}$ $\kappa = 1,4$).

- a) Bestimmen Sie den Druck und die Temperatur an den vier Eckpunkten des Prozesses!
- b) Wie groß ist der thermische Wirkungsgrad des Otto-Prozesses?

Ein Dieselmotor hat ein Verdichtungsverhältnis von $\epsilon_{Diesel} = 18$. Alle anderen Betriebsdaten sind dieselben wie bei dem in (a) und (b) berechneten Ottomotor.

- c) Bestimmen Sie Druck und Temperatur an den vier Eckpunkten des Prozesses!
- d) Wie groß ist das Einspritzverhältnis φ ?
- e) Wie groß ist der thermische Wirkungsgrad?

Lösung: *Vergleich von Otto- und Diesel-Prozess*

- a) Für die Isentrope $1 \rightarrow 2$ gilt:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa = \epsilon^\kappa = 10^\kappa = 25,12 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 \cdot 25,12 = 25,12\text{ bar}$$

Für das Verhältnis der Temperaturen bei isentropen Zustandsänderungen gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = \epsilon^{\kappa-1} = 10^{\kappa-1} = 2,512 \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 \cdot 2,512 = 861,6\text{ K}$$

Für die Isochore $2 \rightarrow 3$ gilt:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{1973\text{ K}}{862\text{ K}} = 2,29 \quad \Rightarrow \quad p_3 = p_2 \cdot 2,29 = 57,5\text{ bar}$$

Für die Isentrope $3 \rightarrow 4$ gilt:

$$\frac{p_3}{p_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa = \epsilon^\kappa = 10^\kappa = 25,12 \quad \Rightarrow \quad p_4 = \frac{p_3}{25,12} = 2,29\text{ bar}$$

Für das Verhältnis der Temperaturen bei isentropen Zustandsänderungen gilt:

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = \epsilon^{\kappa-1} = 10^{\kappa-1} = 2,512 \quad \Rightarrow \quad T_4 = \frac{T_3}{2,512} = 785,5\text{ K}$$

- b) Der thermische Wirkungsgrad berechnet sich zu

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{343\text{ K}}{861,6\text{ K}} = 0,602$$

c) Für die Isentrope 1 → 2 gilt:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa = \epsilon^\kappa = 18^\kappa = 57,2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 \cdot 57,2 = 57,2 \text{ bar}$$

Für das Verhältnis der Temperaturen bei isentropen Zustandsänderungen gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = \epsilon^{\kappa-1} = 18^{\kappa-1} = 3,18 \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 \cdot 3,18 = 1090 \text{ K}$$

Für die Isobare 2 → 3 gilt:

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

Die gesuchten Werte lauten:

$$T_3 = 1973 \text{ K} \quad \text{und} \quad p_2 = p_3 = 57,2 \text{ bar}$$

Zur Berechnung der Zustandsgrößen in Punkt 4 benutzt man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} V_1 = V_4 & \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_4}{T_4} \\ S_3 = S_4 & \Rightarrow \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \\ & \Rightarrow T_4 = T_3^\kappa \left(\frac{p_1}{p_3 T_1}\right)^{\kappa-1} = 787,2 \text{ K} \\ & p_4 = \frac{T_4}{T_1} p_1 = 2,295 \text{ bar} \end{aligned}$$

d) Für das Einspritzverhältnis φ gilt:

$$\varphi = \frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{1973 \text{ K}}{1090 \text{ K}} = 1,81$$

e) Der thermische Wirkungsgrad für den Diesel-Prozess berechnet sich zu:

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\varphi^\kappa - 1}{\kappa(\varphi - 1)} = 1 - \frac{343 \text{ K}}{1090 \text{ K}} \cdot \frac{1,811^{1,4} - 1}{1,4 \cdot 0,811} = 0,64$$

Übung 11

Aufgabe 7.6: Offene Gasturbine

Eine Gasturbinenanlage unterscheidet sich vom reversiblen Joule-Prozess dadurch, dass der Verdichter und die Turbine nicht isentrop arbeiten. Es gilt vielmehr: $\eta_{S,V} = 0,85$ und $\eta_{S,T} = 0,91$. Die Anlage verarbeitet einen Luftmassenstrom von $\dot{m} = 5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$. Die Luft wird im Umgebungszustand mit $p_3 = p_u = 1 \text{ bar}$ und $t_3 = t_u = 20^\circ\text{C}$ angesaugt. Der Druck p_4 am Einlauf der (isobar arbeitenden) Brennkammer beträgt 15 bar . In der Brennkammer wird das Gas auf $t_1 = 1300^\circ\text{C}$ erwärmt. Die Änderung des Massenstromes durch die Einspritzung von Brennstoff soll vernachlässigt werden. Die Turbine expandiert das Gas auf den Umgebungsdruck. Anschließend wird das Gas als Abgas ausgestoßen. Luft soll als ideales Gas mit $R_{Luft} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$, $c_p = 1004 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ und $\kappa = 1,4$ behandelt werden.

- Berechnen Sie die fehlenden Temperaturen und Drücke!
- Welche Leistung $\dot{W}_{t,ges}$ kann die Anlage abgeben, und welchen Wirkungsgrad erreicht sie?
- Welche technische Verlustleistung \dot{W}_{tv} tritt im Verdichter auf?
- Welcher Leistungsverlust durch Irreversibilitäten $\dot{W}_{V,irr}$ tritt im Verdichter auf?
- Warum ist dieser kleiner als die technische Verlustleistung, und auf welche Weise wirkt sich dies im Prozess aus?
- Welche technische Verlustleistung \dot{W}_{tv} tritt in der Turbine auf?
- Welcher Leistungsverlust durch Irreversibilitäten $\dot{W}_{V,irr}$ tritt in der Turbine auf?
- Warum ist diese kleiner als die technische Verlustleistung? Wie könnte man die Differenz nutzen?

Lösung: Offene Gasturbine

- Zunächst wird die Temperatur $T_{4'}$ am Ende einer isentropen Verdichtung von p_3 nach p_4 berechnet:

$$T_{4'} = T_3 \left(\frac{p_{4'}}{p_3} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 293,15 \text{ K } 15^{\frac{0,4}{1,4}} = 635,5 \text{ K}$$

Nach der Definition des isentropen Verdichterwirkungsgrades gilt mit $\eta_{SV} = 0,85$:

$$\eta_{SV} = \frac{h_{4'} - h_3}{h_4 - h_3} = \frac{T_{4'} - T_3}{T_4 - T_3} \Rightarrow T_4 = \frac{T_{4'} - T_3 + \eta_{SV} T_3}{\eta_{SV}} = 695,91 \text{ K}$$

Entsprechend berechnet man zunächst die Temperatur $T_{2'}$ nach einer isentropen Entspannung der heißen Gase auf den Umgebungsdruck:

$$T_{2'} = T_1 \left(\frac{p_{2'}}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1573,15 \text{ K } \left(\frac{1}{15} \right)^{\frac{0,4}{1,4}} = 725,68 \text{ K}$$

Nach der Definition des isentropen Turbinenwirkungsgrades gilt:

$$\eta_{ST} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2'}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_{2'}} \Rightarrow T_2 = T_1 - \eta_{ST}(T_1 - T_{2'}) = 801,95 \text{ K}$$

b) Es gilt für die Leistung der Anlage:

$$\dot{W}_{t,ges} = \dot{m}(w_{t,12} + w_{t,34}) = \dot{m}c_p(T_2 - T_1 + T_4 - T_3) = -1849,57 \text{ kW}$$

Der zugeführte Wärmestrom beträgt

$$\dot{Q}_{41} = \dot{m}c_p(T_1 - T_4) = 4403,74 \text{ kW}$$

Der Wirkungsgrad beträgt:

$$\eta = \frac{\dot{W}_{t,ges}}{\dot{Q}_{41}} = 0,42$$

c) Die technische Verlustleistung im Verdichter ist die Differenz zwischen den Leistungen des reversiblen und des irreversiblen Prozesses:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{t,v,Verdichter} &= |\dot{m}c_p(T_{4'} - T_3) - \dot{m}c_p(T_4 - T_3)| \\ &= \dot{m}c_p|T_4 - T_{4'}| = 303,3 \text{ kW} \end{aligned}$$

d) Der im Verdichter auftretende Leistungsverlust (d.h. Arbeitsverlust pro Zeit) durch Irreversibilitäten wird als Produkt aus Umgebungstemperatur und Entropieproduktion berechnet:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{V,irr} &= T_u \dot{S}_{prod} = \dot{m}T_u \cdot (s_4 - s_3) = \\ &= \dot{m}T_u \left[c_p \left(\ln \frac{T_4}{T_0} - \ln \frac{T_3}{T_0} \right) - R_{Luft} \left(\ln \frac{p_4}{p_0} - \ln \frac{p_3}{p_0} \right) \right] \\ &= \dot{m}T_u \left(c_p \ln \frac{T_4}{T_3} - R_{Luft} \ln \frac{p_4}{p_3} \right) \\ &= 5 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 293,15 \text{ K} \left(867,99 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} - 777,21 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right) = 133,06 \text{ kW} \end{aligned}$$

e) Der Arbeitsverlust durch Irreversibilitäten ist kleiner als der technische Arbeitsverlust, weil ein Teil der zusätzlich aufgewendeten Verdichterleistung in den nachfolgenden Prozessen positive Auswirkungen hat. Im vorliegenden Fall verringert sich der in der Brennkammer aufzuwendende Brennstoffmassenstrom. Allerdings können die Verluste nur teilweise durch Einsparungen in den anderen Prozessen wettgemacht werden. Der absolut unwiederbringliche Anteil am technischen Leistungsverlust ist der Leistungsverlust durch Irreversibilitäten.

f) Die technische Verlustleistung in der Turbine ist wiederum die Differenz zwischen der isentropen und der realen Turbinenleistung:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{t,v,Turbine} &= |\dot{m}c_p(T_{2'} - T_1) - \dot{m}c_p(T_2 - T_1)| \\ &= \dot{m}c_p|(T_{2'} - T_2)| = 382,9 \text{ kW} \end{aligned}$$

- g) Zur Berechnung des Leistungsverlustes durch Irreversibilitäten wird - genau wie beim Verdichter - das Produkt aus Umgebungstemperatur und Entropieproduktion berechnet:

$$\begin{aligned}
 \dot{W}_{V,irr} &= T_u \dot{S}_{prod} = \dot{m} T_u \cdot (s_2 - s_1) = \\
 &= \dot{m} T_u \left[c_p \left(\ln \frac{T_2}{T_0} - \ln \frac{T_1}{T_0} \right) - R_{Luft} \left(\ln \frac{p_2}{p_0} - \ln \frac{p_1}{p_0} \right) \right] \\
 &= \dot{m} T_u \left(c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R_{Luft} \ln \frac{p_2}{p_1} \right) \\
 &= 5 \frac{kg}{s} \cdot 293,15 K \left(-676,5 \frac{J}{kg K} + 777,21 \frac{J}{kg K} \right) = 147,6 kW
 \end{aligned}$$

- h) Da der technische Leistungsverlust der Turbine bei hoher Temperatur stattfindet, ist nur ein kleiner Teil davon endgültig verloren. Ein großer Teil könnte in nachfolgenden Prozessen noch genutzt werden. Bei dem vorliegenden Prozess findet diese Nutzung allerdings nicht statt, weil das Gas in die Umgebung ausgestoßen wird. Zur Nutzung von Gasturbinen-Abwärme führt man diese entweder dem komprimierten Gas zu, um in der Brennkammer Brennstoff zu sparen, oder man betreibt mit der Abwärme ein Dampfkraftwerk, um weitere Leistung zu gewinnen.

Aufgabe 7.7: *Dampfkraftprozess*

In einem Dampfkraftwerk wird ein Massenstrom $\dot{m} = 5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ umgewälzt. Das Wasser durchläuft dabei folgende Zustandsänderungen:

- 1 \rightarrow 2: isentrope Druckerhöhung vom Zustand 1 (siedendes Wasser bei $p_1 = 0,04 \text{ bar}$) zum Zustand 2 mit $p_2 = 110 \text{ bar}$ in der Speisewasserpumpe,
- 2 \rightarrow 3: isobare Erwärmung der Flüssigkeit auf die Siedetemperatur,
- 3 \rightarrow 4: Verdampfung der Flüssigkeit bei der Siedetemperatur,
- 4 \rightarrow 5: isobare Dampfüberhitzung auf $t_5 = 500^\circ\text{C}$,
- 5 \rightarrow 6: Entspannung in der Dampfturbine mit dem Wirkungsgrad $\eta_{sT} = 0,8$ bis zum Druck $p_6 = p_1 = 0,04 \text{ bar}$ und
- 6 \rightarrow 1: isobare Wärmeabfuhr, bis siedende Flüssigkeit vorliegt.

Flüssiges Wasser soll als inkompressibel angenommen werden.

Für Heißdampf gilt bei $p = 110 \text{ bar}$, $t = 500^\circ\text{C}$: $h = 3362,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ und $s = 6,5462 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$.

- a) Skizzieren Sie den Prozess im T - s -Diagramm. Hinweis: Es gilt

$$2200 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} < h_6 < 2300 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

- b) Berechnen Sie die spezifische Arbeit der Speisewasserpumpe $w_{t,12}$ und die Enthalpie h_2 !
- c) Berechnen Sie die spezifischen Wärmezufuhren q_{23} , q_{34} und q_{45} !
- d) Berechnen Sie den insgesamt zugeführten Wärmestrom \dot{Q}_{25} !
- e) Welche Enthalpie h_{6^*} würde nach einer isentropen Entspannung auf p_6 vorliegen?
- f) Welche Enthalpie h_6 liegt tatsächlich vor?
- g) Welchen Dampfanteil hat der umlaufende Massenstrom beim Verlassen der Turbine?
- h) Welche Leistung und welcher Wirkungsgrad wird mit dem vorliegenden Dampfkraftprozess erreicht? Bei den Berechnungen ist die Speisewasserpumpe zu berücksichtigen!

Lösung: Dampfkraftprozess

- a) Der Hinweis zeigt, dass der Zustand 6 im Zweiphasengebiet liegt, denn bei $p_6 = 0,04 \text{ bar}$ gilt $h' < h_6 < h''$.

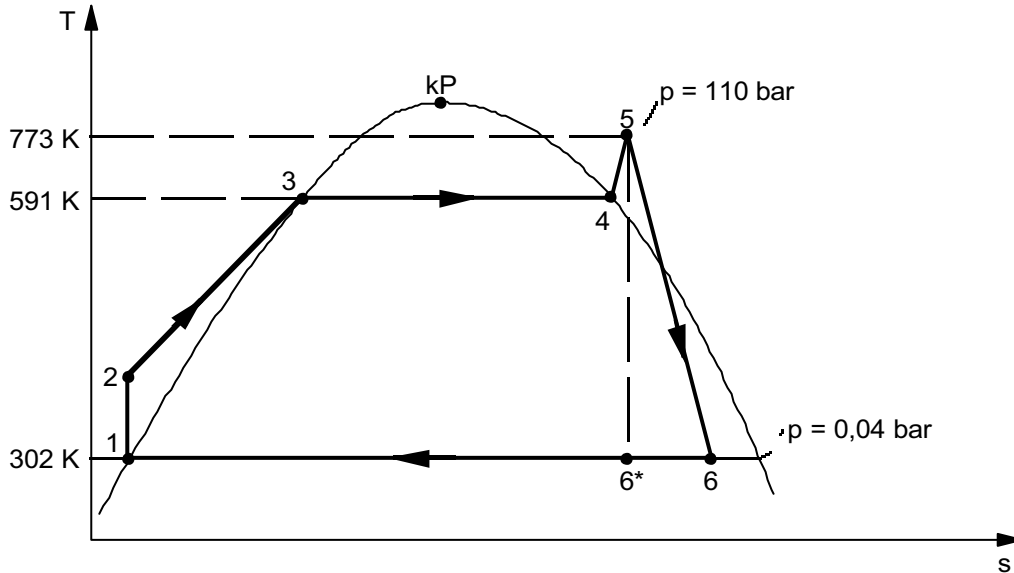


Abbildung 1: Der Dampfkraftprozess im T-s-Diagramm

- b) Die spezifische Arbeit der Pumpe berechnet sich als Produkt aus spezifischem Volumen und Druckdifferenz:

$$w_{t,12} = v \Delta p = 0,001 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 109,96 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 10996 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 11,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Die spezifische Enthalpie h_2 berechnet man aus dem Ersten Hauptsatz mit $h_1 = h'(0,04 \text{ bar})$ (Dampftafel):

$$h_2 = h_1 + w_{t,12} = 132,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

- c) Die spezifischen Wärmezufuhren betragen:

$$q_{23} = h_3 - h_2 = h'(110 \text{ bar}) - h_2 = 1317,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$q_{34} = h_4 - h_3 = r(110 \text{ bar}) = 1259,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$q_{45} = h_5 - h_4 = h_5 - h''(110 \text{ bar}) = 654,1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

- d) $\dot{Q}_{25} = \dot{m}(h_5 - h_2) = 16152,5 \text{ kW}$

e) Nach isentroper Entspannung gilt

$$\begin{aligned}s_{6^*} &= s_5 = 6,5462 \frac{kJ}{kg K} \\ \Rightarrow x_{6^*} &= \frac{s_{6^*} - s'}{s'' - s'} = \frac{6,5462 - 0,4224}{8,4725 - 0,4224} = 0,7607 \\ \Rightarrow h_{6^*} &= x_{6^*} \cdot h'' + (1 - x_{6^*}) \cdot h' = 1971,6 \frac{kJ}{kg}\end{aligned}$$

f) Nach der Definition des isentropen Turbinenwirkungsgrades gilt:

$$\begin{aligned}\eta_{sT} &= \frac{h_5 - h_6}{h_5 - h_{6^*}} \\ \Rightarrow h_6 &= h_5 - \eta_{sT}(h_5 - h_{6^*}) = 2249,9 \frac{kJ}{kg}\end{aligned}$$

g) Der Dampfanteil wird aus der Enthalpie h_6 berechnet:

$$x_6 = \frac{h_6 - h'}{h'' - h'} = \frac{2128,5}{2432,2} = 0,875$$

h) Die Leistung des Kraftwerks ist die Summe aus der Turbinenleistung (kleiner als 0) und der Leistung der Speisewasserpumpe (größer als 0):

$$\begin{aligned}\dot{W}_{t,ges} &= \dot{W}_{t,56} + \dot{W}_{t,12} = \dot{m}(h_6 - h_5 + h_2 - h_1) = -5510 kW \\ \eta &= \frac{|\dot{W}_{t,ges}|}{\dot{Q}_{25}} = 0,341\end{aligned}$$

Aufgabe 7.9: *Stirling-Prozess I*

Ein Stirling-Motor liefert im stationären Betrieb bei einer Umdrehungszahl $n = 3600 \text{ min}^{-1}$ die Leistung $\dot{W}_t = 100 \text{ W}$. Der Wirkungsgrad der Maschine beträgt $\eta_{th} = 0,2$. Im Zustand 1 (Arbeitskolben unterer Totpunkt, Verdrängerkolben oberer Totpunkt) herrscht innerhalb des Arbeitsraumes ein Druck $p_1 = 2 \text{ bar}$ und eine Temperatur $t_1 = 30^\circ\text{C}$. Das Arbeitsmittel Helium (ideales Gas) nimmt zu diesem Zeitpunkt das Volumen $V_1 = 500 \text{ cm}^3$ ein. Es gilt $M_{He} = 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

Bestimmen Sie den Druck p_2 , die Temperatur T_3 , die bei einer Umdrehung aufgenommene Wärme Q_{34} sowie die massenspezifische Wärmemenge q_{34} .

Lösung: *Stirling-Prozess I*

Die Temperatur T_3 ergibt sich zu:

$$T_3 = \frac{T_1}{1 - \eta_{th}} = \frac{303,15 \text{ K}}{0,8} = 378,9 \text{ K}$$

Der im zeitlichen Mittel aufgenommene Wärmestrom \dot{Q}_{34} beträgt:

$$\dot{Q}_{34} = \frac{\dot{W}_t}{\eta_{th}} = \frac{100 \text{ W}}{0,2} = 500 \text{ W}$$

Für die bei einer Umdrehung aufgenommene Wärmemenge Q_{34} folgt somit:

$$Q_{34} = \frac{\dot{Q}_{34}}{n} = 8,33 \text{ J}$$

Die Masse des Heliumgases im Stirlingmotor berechnet man mit der Zustandsgleichung für ideale Gase:

$$m = \frac{p_1 V_1}{R_{He} T_1} = \frac{2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,0005 \text{ m}^3 \cdot 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{8,3145 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 303,15 \text{ K}} = 0,1587 \text{ g}$$

Es ergibt sich somit ein spezifischer Wärmestrom q_{34} von

$$q_{34} = \frac{Q_{34}}{m_{He}} = \frac{8,33 \text{ J}}{1,588 \cdot 10^{-4} \text{ kg}} = 52,49 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Druck p_2 :

$$p_2 = p_1 \exp\left(\frac{q_{34}}{R_{He} T_3}\right) = 2 \text{ bar} \exp\left(\frac{52,49 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \cdot 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{8,3145 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 378,9 \text{ K}}\right) = 2 \text{ bar} \cdot e^{0,06665} = 2,14 \text{ bar}$$

Übung 12

Aufgabe 7.11: *Kälteprozess im Haushaltskühlschrank*

Ein Haushaltskühlschrank soll mit dem Kältemittel R 134a betrieben werden, aus dessen Stoffdatentabelle ein Auszug bei Aufgabe 7.10 gegeben ist. Die Kühlung soll mit einem einstufigen Prozess erfolgen, der folgende Eigenschaften hat (vgl. Abb. Kaldampfprozess im Skriptum, Indizierung: Punkt 6 nach der Drossel):

Verdampfung bei $t_6 = -3^\circ\text{C}$ und $p_6 = 2,62\text{ bar}$; isobare Überhitzung um 7 K ; Verdichtung auf $p_2 = 9,37\text{ bar}$ mit $\eta_{sV} = 0,74$; Verflüssigung bei $t_3 = 37^\circ\text{C}$ und isobare Unterkühlung auf $t_5 = 32^\circ\text{C}$; adiabate Drosselung auf den geringen Druck p_6 . Die Kälteanlage entzieht dem Kühlschrank einen Wärmestrom von $\dot{Q}_0 = 300\text{ W}$.

Bestimmen Sie:

- die Enthalpien h_1 bis h_7 nach Abb. Kaldampfprozess im Skriptum (Zur Berechnung von h_5 (aus h_4) bitte die Wärmekapazität von flüssigem R 134a benutzen!),
- den umlaufenden Massenstrom,
- die Leistung, die dem Verdichter zuzuführen ist,
- die Leistungszahl ϵ ,
- den angesaugten Volumenstrom und
- die Kälteleistungszahl ϵ_C , die ein Carnot-Prozess erzielen würde. Die Kühlschrank-Innentemperatur beträgt 4°C , die Außentemperatur 23°C .

Lösung: *Kälteprozess im Haushaltskühlschrank*

- a) Es ergeben sich folgende Enthalpien:

$$\begin{aligned}h_1 &= h(p_6, t = 4^\circ\text{C}) = 402 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} & h_{2^*} &= h(p_3 \text{ mit } s_{2^*} = s_1) = 429 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\h_2 &= h_1 + \frac{h_{2^*} - h_1}{\eta_{sV}} = \left(402 + \frac{27}{0,74}\right) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 438,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\h_3 &= h''(p_3) = h''(9,37\text{ bar}) = 417 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} & h_4 &= h'(p_3) = 252 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\h_5 &= h_4 - c_p(T_4 - T_5) = 244,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\ \text{Wegen der isenthalpen Drosselung gilt: } h_6 &= h_5 = 244,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\h_7 &= h''(t_6) = 395 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\end{aligned}$$

- b) Der Massenstrom wird mit folgender Beziehung berechnet:

$$\dot{Q}_0 = \dot{m}(h_1 - h_6) \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \frac{\dot{Q}_0}{h_1 - h_6} = \frac{300\text{ W}}{(402 - 244,5) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} = 1,905 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

- c) Die Antriebsleistung \dot{W}_t ergibt sich als Produkt aus der spezifischen Enthalpieänderung am Verdichter und dem Massenstrom:

$$\dot{W}_t = \dot{m}(h_2 - h_1) = 69,5 \text{ W}$$

- d) Nach der Definitionsgleichung der Kälteleistungszahl ergibt sich:

$$\epsilon = \frac{\dot{Q}_0}{\dot{W}_t} = 4,31$$

- e) Der angesaugte Volumenstrom berechnet sich aus dem spezifischen Volumen im Ansaugzustand:

$$\dot{V} = \dot{m}v(4^\circ\text{C}, 2,62 \text{ bar}) = 1,51 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0,151 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

- f) Ein linksläufiger Carnot-Prozess hat die Kälteleistungszahl:

$$\epsilon_C = \frac{T_0}{T - T_0} = \frac{277,15 \text{ K}}{19 \text{ K}} = 14,58$$

Aufgabe 7.12: *Gebäudeheizung mit einer Wärmepumpe*

Eine Wärmepumpe soll der Umgebung Wärme entziehen und sie bei höherer Temperatur einem Gebäude zuführen. Das umlaufende Kältemittel ist R 134a. Der Kreisprozess (Drücke, Wirkungsgrad η_{sV} , spezifische Enthalpien) entspricht dem aus Aufgabe 11.11. Der Wärmebedarf des Heizungssystems beträgt $\dot{Q} = 6000 \text{ W}$.

Berechnen Sie

- a) den umlaufenden Massenstrom,
- b) den Leistungsbedarf und
- c) die Heizleistungszahl ϵ_{WP} .

Die Überhitzung des Kältemittels am Zustandspunkt 1 wird von 7 K auf 3 K verkleinert, so dass der Verdichter Kältemittel bei 0°C ansaugt. Der Verdichtewirkungsgrad bleibt unverändert, der Bedarf an Heizleistung ebenfalls.

- d) Berechnen Sie für diesen Fall den Massenstrom und Leistungsbedarf sowie die Heizleistungszahl.
- e) Hat die Prozessführung unter d) auch Vorteile im Vergleich zu dem ursprünglichen Wärmepumpenprozess?

Lösung: *Gebäudeheizung mit einer Wärmepumpe*

- a) Der Massenstrom berechnet sich aus:

$$|\dot{Q}| = \dot{m}(h_2 - h_5) \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \frac{|\dot{Q}|}{h_2 - h_5} = \frac{6 \text{ kW}}{(438,5 - 244,5) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} = 30,9 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

- b) Leistungsbedarf:

$$\dot{W}_t = \dot{m}(h_2 - h_1) = 1,129 \text{ kW}$$

- c) Heizleistungszahl einer Wärmepumpe:

$$\epsilon_{WP} = \frac{|\dot{Q}|}{\dot{W}_t} = 5,31 = 1 + \epsilon$$

- d) Für den neuen Prozess ergeben sich andere Zustände 1 und 2; der Rest des Prozesses bleibt unverändert.

$$h_1 = 398 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \text{ lt. Stoffdatentabelle}$$

$$h_{2^*} = 425 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \text{ mit } s_{2^*} = s_1 \text{ sowie } p_2 = p_3$$

$$h_2 = h_1 + \frac{h_{2^*} - h_1}{\eta_{sV}} = \left(398 + \frac{27}{0,74} \right) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 434,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Mit dem jetzt bekannten Wert für h_2 lässt sich der Massenstrom analog zu Aufgabenteil a) berechnen:

$$|\dot{Q}| = \dot{m}(h_2 - h_5) \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \frac{|\dot{Q}|}{h_2 - h_5} = \frac{6 \text{ kW}}{(434,5 - 244,5) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} = 31,6 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

Der Leistungsbedarf wird analog zu Aufgabenteil b) berechnet:

$$\dot{W}_t = \dot{m}(h_2 - h_1) = 1,153 \text{ kW}$$

Die Leistungszahl beträgt:

$$\epsilon_{WP} = \frac{\dot{Q}}{\dot{W}_t} = 5,20$$

- e) Ja: Die Wärmepumpe nach Aufgabenteil d) hat zwar eine geringere Leistungszahl, funktioniert aber auch noch bei geringeren Außentemperaturen, weil die höchste Temperatur im kalten Anlagenteil von 4°C auf 0°C abgesenkt wurde. Um eine wirklich vergleichbare Anlage zu erhalten, müsste man die geringere Überhitzung ausnutzen, um die Verdampfungstemperatur auf $+1^\circ\text{C}$ zu erhöhen - dann wäre das Verhältnis der Drücke kleiner, was sich positiv auf den isentropen Wirkungsgrad des Verdichters auswirkt. Dies ist der Hauptgrund dafür, dass sich dann die Effizienz des Gesamtsystems erhöht.

Übung 13

Aufgabe 7.17: Sättigung

Ein PKW wird abends vor dem Haus abgestellt. Die im PKW vorhandene Luft habe die Temperatur $t_1 = 20^\circ\text{C}$, den Druck $p_1 = p_{Umg} = 1 \text{ bar}$ und den Feuchtigkeitsgehalt $x = 0,00688$.

- a) Wie tief darf die Temperatur nachts absinken, bevor die Fenster des PKW von innen beschlagen ?

Auszug aus der Wasserdampf tabel:

$p_{s,Wasser} / \text{bar}$	0,00829	0,01093	0,01429	0,01853
$t / ^\circ\text{C}$	4	8	12	16

$$M_{tr.Luft} = 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}; M_{Wasser} = 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}.$$

- b) Wieviel Wasserdampf ist in 1 m^3 der ursprünglich vorhandenen Luft enthalten ?

Lösung : Sättigung

- a) Da die Sättigungseladung der feuchten Luft temperaturabhängig ist

$$x_s = x_s(p_1, t_{min})$$

und ferner für die Beladung der Luft

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_W}{m_L} = \frac{M_W \cdot n_W}{M_L \cdot n_L} = \frac{M_W \frac{n_W}{n_{ges}}}{M_L \frac{n_L}{n_{ges}}} = \frac{M_W \psi_W}{M_L \psi_L} \\ &= \frac{M_W \psi_W}{M_L (1 - \psi_W)} = \frac{M_W \psi_W \cdot p}{M_L (p - \psi_W \cdot p)} = \frac{M_W p_W}{M_L (p - p_W)} \end{aligned}$$

gilt, folgt für die kleinstmögliche Temperatur, bei der noch kein Wasser auskondensiert

$$0,00688 = x_s(t_{min}) = \frac{M_W p_{s,W}^{min}(t_{min})}{M_L (p_1 - p_{s,W}^{min}(t_{min}))}$$

Somit ergibt sich der kleinstmögliche Partialdruck des Wassers zu:

$$p_{s,W}^{min}(t_{min}) = \frac{x p_1}{\frac{M_W}{M_L} + x} = 0,01096 \text{ bar}$$

Somit gilt nach Vergleich mit dem Dampftafelauszug für die kleinstmögliche Temperatur:

$$t_{min} \cong 8^\circ\text{C}$$

- b) Für einen Kubikmeter ($V = 1 \text{ m}^3$) feuchter Luft gilt:

$$\begin{aligned} V = V_W + V_L &= (n_W + n_L) \frac{R_m T_1}{p_1} \\ &= \left(\frac{m_W}{M_W} + \frac{m_L}{M_L} \right) \frac{R_m T_1}{p_1} = m_L \left(1 + x \frac{M_L}{M_W} \right) \frac{R_m T_1}{M_L p_1} \\ &= m_L v_{1+x} \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$m_L = 1176,7 \text{ g} \quad \text{sowie} \quad m_W = x \cdot m_L = 8,09 \text{ g}$$

Aufgabe 7.18: *Sättigung*

Ein Ballon trägt eine verschlossene Instrumentenkapsel in die Höhe. In der Kapsel befindet sich u.a. feuchte Luft, die sich während des Ballonaufstieges isochor abkühlt. Bei welcher Temperatur tritt in der Kapsel das erste Kondensat auf ?

$$p_1 = 1 \text{ bar}; \quad t_1 = 20^\circ \text{C}; \quad x_1 = 0,00582$$

Dampfdruckgleichung des reinen Wassers:

$$p_{s,H_2O}^{rein}(T) = 0,018 \text{ bar} \cdot \exp\left(18,33 - \frac{5300 \text{ K}}{T}\right)$$

Lösung : *Sättigung*

Die Kondensatbildung setzt ab dem Partialdruck

$$p_{s,W}^{min}(T) \stackrel{!}{=} p_W(t_1) = p \cdot \psi_W = p \cdot \frac{x_1}{x_1 + \frac{M_W}{M_L}}$$

$$\text{ein. Mit } \left. \begin{array}{l} p_1 V = n R_m T_1 \\ p V = n R_m T \end{array} \right\} \text{ folgt weiter: } p = p_1 \frac{T}{T_1}$$

Also:

$$p_{s,W}^{min}(T) = p_1 \frac{T}{T_1} \frac{x_1}{x_1 + \frac{M_W}{M_L}}$$

Eingesetzt in die Dampfdruckgleichung des reinen Wassers folgt:

$$0,018 \text{ bar} \cdot \exp\left(18,33 - 5300 \frac{\text{K}}{T}\right) = 1 \text{ bar} \cdot \frac{T}{293,15 \text{ K}} \cdot \frac{0,00582}{0,00582 + \frac{18}{29}}$$

Aus dieser Gleichung gewinnt man iterativ das Ergebnis

$$T = 278,3 \text{ K.}$$