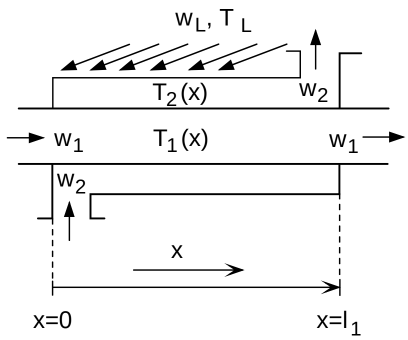
Aufgabe 3.7: *Gekühlter Gleichstromwärmeübertrager*

Ein Gleichstromwärmeübertrager, der aus zwei konzentrischen Rohren besteht, wird von zwei Wasserströmen mit derselben Geschwindigkeit durchflossen: $w_1 = w_2 = 0,1\,\frac{m}{s}$. Die Eintrittstemperatur des im Innenrohr fließenden Wassers beträgt $T_1^0 = 350\,K$, die des im Außenrohr (genauer: in dem von Außen- und Innenrohr gebildeten konzentrischen Ringspalt) fließenden Wassers beträgt $T_2^0 = 300\,K$. Das Außenrohr wird außerdem von der Seite mit Luft der Geschwindigkeit $w_L = 5\,\frac{m}{s}$ und der Temperatur $T_L = 275\,K$ angeströmt. Rohrlänge $l_1 = 1\,m$.



Der Radius des Innenrohres beträgt $r_1 = 5\,cm$, der des Außenrohres $r_2 = 10\,cm$. Die Dicke der Rohrwände soll vernachlässigt werden, d.h. sie hat keinen Einfluss auf die thermischen Widerstände und die durchströmte Querschnittsfläche.

a) Berechnen Sie die Wärmeübergangskoeffizienten *Wasser Innenrohr/Rohrwand* α_i, *Wasser Außenrohr/Rohrwand* α_a und *Umgebungsluft/Rohrwand* α_L!
Hinweis: Verwenden Sie zur näherungsweisen Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten „*Wasser Außenrohr / Rohrwand*“ die Beziehung für den konzentrischen Ringspalt mit beidseitigem Wärmeaustausch bei *gleicher* Wandtemperatur!
Die Rohre werden als unendlich dünn betrachtet, das heißt es gilt $r_i = r_a$ und somit auch $A_i = A_a$.

b) Wie lauten die resultierenden Wärmedurchgangskoeffizienten für „ *Wasser Innenrohr / Wasser Außenrohr*“ $k_1{\cdot}A$ und für „*Wasser Außenrohr / Umgebungsluft*“ $k_2{\cdot}A$?

Hinweis: Verwenden Sie näherungsweise die Stoffwerte des flüssigen Wassers bei einer mittleren Temperatur von $50°C$ und der Luft bei $20°C$ (Druck $p = 1\,bar$).

Lösung: *Gekühlter Gleichstromwärmeübertrager*

a) Die Reynoldszahl im Innenrohr beträgt

$$Re_i = \frac{w_1\,2r_1}{\nu_W} = 18051 > 2300 \quad \text{mit} \quad \nu = 0,554\cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$$

Die Strömung ist somit turbulent. Man findet für die Nußeltzahl im turbulenten Bereich, angewandt auf die Geometrie des durchströmten Rohres

$$Nu = f_3 \frac{\frac{\xi}{8}(Re - 1000)\,Pr}{1 + 12,7\sqrt{\frac{\xi}{8}}\,(Pr^{2/3} - 1)} \left\{ 1 + \left(\frac{d_H}{L}\right)^{2/3} \right\} \qquad (*)$$

$$\text{mit} \qquad f_3 = 1 \qquad \xi = (1,82 \log_{10}(Re) - 1,64)^{-2} = 0,02682$$
$$d_H = 2r_1 \qquad L = l_1 = 1\,m \qquad Pr = 3,553$$

die Werte

$$Nu_i = 124,9 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_i = \frac{Nu\,\lambda_W}{2r_1} = 804\,\frac{W}{m^2\,K} \quad \text{mit} \quad \lambda_W = 0,6436\,\frac{W}{K\,m}$$

Die Reynoldszahl des Außenrohres hat in diesem Fall den gleichen Wert, da der Innendurchmesser durch die Durchmesserdifferenz $2r_2 - 2r_1 = 0,1\,m$ ersetzt wird:

$$Re_a = \frac{w_1\,(2r_2 - 2r_1)}{\nu_W} = 18051 > 2300$$

Die Nußelt-Zahl für den *konzentrischen Ringspalt mit beidseitigem Wärmeaustausch* berechnet sich mit Hilfe von Gleichung (*) und den Parametern

$$f_3 = \frac{0,86\left(\frac{d_i}{d_a}\right)^{0,84} + 1 - 0,14\left(\frac{d_i}{d_a}\right)^{0,6}}{1 + \frac{d_i}{d_a}} = 0,9254; \quad d_H = 2r_2 - 2r_1 = 0,1\,m$$

zu:

$$Nu_a = 115,6 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_a = \frac{Nu\,\lambda_W}{2r_2 - 2r_1} = 744\,\frac{W}{m^2\,K}$$

Die Nußeltzahl Nu_L für den mit Luft quer angeströmten Zylinder berechnet sich mit folgender Beziehung:

$$Nu_L = Nu_{ruhend} + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2}$$

$$\text{wobei gilt:} \quad Pr = 0,7148 \qquad l = \frac{\pi}{2}d = \pi r_2 \qquad \nu_L = 153,5 \cdot 10^{-7}\,\frac{m^2}{s}$$

$$\Rightarrow \quad Re = \frac{w_L l}{\nu_L} = 102332$$

$$Nu_{ruhend} = 0,3$$

$$Nu_{lam} = 0,664\,\sqrt{Re}\,\sqrt[3]{Pr} = 189,9$$

$$Nu_{turb} = \frac{0,037\,Re^{0,8}\,Pr}{1 + 2,443\,Re^{-0,1}\,(Pr^{2/3} - 1)} = 318,7$$

$$\Rightarrow \quad Nu_L = 371,3 \Rightarrow \alpha_L = \frac{Nu\,\lambda_L}{\pi\,r_2} = 30,35\,\frac{W}{m^2\,K} \quad \text{mit} \quad \lambda_L = 0,02569\,\frac{W}{K\,m}$$

b) Der resultierende Wärmedurchgangskoeffizient *Wasser Innenrohr/Wasser Außenrohr* berechnet sich nun mit Hilfe der Beziehungen für die Reihenschaltung von Wärmewiderständen zu:

$$\frac{1}{k_1 \cdot A} = \frac{1}{\alpha_i \cdot A_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\pi\,\lambda\,L} + \frac{1}{\alpha_a \cdot A_a}$$

Berücksichtigt man $r_i = r_a$ (dünne Rohrwand), so erhält man

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_a}} = 386,4 \, \frac{W}{m^2 \, K}$$

Der resultierende Wärmedurchgangskoeffizient *Wasser Außenrohr/Umgebungsluft* berechnet sich analog

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{\alpha_a} + \frac{1}{\alpha_L} \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_a} + \frac{1}{\alpha_L}} = 29,16 \, \frac{W}{m^2 \, K}$$

Aufgabe 3.14: *Wärmeübergang an einer verglasten Gebäudewand*

Ein Bungalow verfügt über eine $l = 12\,m$ lange und $h = 2,5\,m$ hohe Glaswand zum Garten. Das Haus wird beheizt, so dass innen eine Temperatur von $\vartheta_i = 21\,°C$ herrscht, obwohl die Temperatur außen $\vartheta_a = -1\,°C$ beträgt.

a) Entlang der Scheiben bläst Wind mit der Geschwindigkeit $w = 11\,\frac{m}{s}$. Berechnen Sie die Reynoldszahl, die Nußeltzahl und den Wärmeübergangskoeffizienten α_a außen am Haus. Stoffdaten der Luft sind bei $0\,°C$ einzusetzen.

b) Um den Wärmeübergang zwischen der Wohnraumluft und der Glaswand zu berechnen, soll zunächst angenommen werden, dass freie Konvektion vorliegt. Berechnen Sie unter dieser Annahme die Kennzahlen Gr, Ra, Nu und den Wärmeübergangskoeffizienten α_i. Stoffwerte der Luft sind bei $\vartheta = 20\,°C$ einzusetzen. Als Schätzwert für die Temperatur der Wandinnenseite soll $\vartheta_{W,i} = 13,65\,°C$ verwendet werden.
An der Wand liegt jedoch keine ungestörte freie Konvektion vor, weil im unteren Bereich des Fensters Heizkörper angebracht sind, so dass am Fenster erwärmte Luft nach oben steigt. Dieser Umstand soll mit einer Verdoppelung von α_i berücksichtigt werden.

c) Die Verglasung der Hauswand besteht aus drei Glasschichten von je $d = 5\,mm$ Dicke, die voneinander jeweils einen Abstand von $s = 12\,mm$ haben. Die Wärmeleitfähigkeit des Glases beträgt $\lambda = 0,8\,\frac{W}{m\,K}$. Der Wärmetransport durch die Luft zwischen den Glasscheiben erfolgt nicht nur durch Wärmeleitung, sondern auch durch Konvektion und Strahlung. Um die beiden letzten Effekte mit zu berücksichtigen, soll mit dem (eigentlich viel zu großen) Wert $\lambda_{eff,Luft} = 0,08\,\frac{W}{m\,K}$ gerechnet werden. Berechnen Sie den k-Wert der Wand!

d) Welcher Wärmestrom entweicht durch die verglaste Hauswand in die Umgebungsluft?

e) Berechnen Sie zur Kontrolle des Schätzwertes von Aufgabenteil b) die Temperatur an der Wandinnenseite!

Lösung: *Wärmeübergang an einer verglasten Gebäudewand*

a) An der Außenseite des Hauses herrscht erzwungene Konvektion. Die Reynoldszahl beträgt

$$Re = \frac{w \cdot l}{\nu} = \frac{11\,\frac{m}{s} \cdot 12\,m}{135,2 \cdot 10^{-7}\,\frac{m^2}{s}} = 9\,763\,314$$

Zur Berechnung der Nußelt-Zahl gilt (siehe Vorlesungsunterlagen):

$$\begin{aligned} Nu_{ruhend} &= 0 \\ Nu_{lam} &= 0,664\sqrt{Re}\,\sqrt[3]{Pr} = 0,664\sqrt{9\,763\,314}\,\sqrt[3]{0,7179} \\ &= 1857,8 \\ Nu_{turb} &= \frac{0,037\,Re^{0,8}\,Pr}{1 + 2,443\,Re^{-0,1}\,(Pr^{2/3} - 1)} = 11486 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Nu &= Nu_{ruhend} + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2} = 11636 \\
\Rightarrow \quad \alpha_a &= \frac{Nu \cdot \lambda}{l} = \frac{11636 \cdot 0,02418\,\frac{W}{K\,m}}{12\,m} = 23,45\,\frac{W}{m^2\,K}
\end{aligned}$$

b) Auf der Innenseite herrscht freie Konvektion. Deshalb ist zunächst die Grashof-Zahl zu berechnen, wobei als typische Länge l der vertikalen Wand die Höhe $h = 2,5\,m$ verwendet wird. Anschließend wird die Nußeltzahl berechnet.

$$\begin{aligned}
Gr &= \frac{gl^3}{\nu^2}\beta\,(\vartheta_\infty - \vartheta_W) = \frac{9,81\,\frac{m}{s^2}\cdot(2,5\,m)^3}{\left(153,5\cdot 10^{-7}\frac{m^2}{s}\right)^2}\,3,421\cdot 10^{-3}\,K^{-1}(21\,°C - 13,65\,°C) \\
&= 1,6357\cdot 10^{10} \\
Ra &= Gr\cdot Pr = 1,6357\cdot 10^{10}\cdot 0,7148 = 1,1692\cdot 10^{10} \\
f_1 &= \left[1+\left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{-\frac{16}{9}} = 0,34809 \\
Nu &= \left(0,825 + 0,387\sqrt[6]{Ra\,f_1}\right)^2 = 265,32 \\
\alpha_i &= \frac{Nu\cdot\lambda_L}{h} = \frac{265,32\cdot 0,02569\,\frac{W}{K\,m}}{2,5\,m} = 2,7264\,\frac{W}{m^2\,K}
\end{aligned}$$

Wegen der Verdoppelung infolge der Heizungsströmung gilt $\alpha_i = 5,4528\,\frac{W}{m^2\,K}$.

c) Die Definition des k-Wertes lautet im vorliegenden Fall:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + 3\frac{d_{Glas}}{\lambda_{Glas}} + 2\frac{s}{\lambda_{eff,Luft}} + \frac{1}{\alpha_a} \quad \Rightarrow \quad k = 1,836\,\frac{W}{m^2\,K}$$

d) Der Wärmestrom berechnet sich nach folgender Beziehung:

$$\dot{Q} = k\cdot A\cdot\Delta\vartheta = 1,836\,\frac{W}{m^2\,K}\cdot 12\,m\cdot 2,5\,m\cdot 22\,K = 1211\,W$$

e) Die Wandtemperatur auf der Innenseite $\vartheta_{W,i}$ lässt sich durch folgenden Zusammenhang berechnen:

$$\begin{aligned}
(\vartheta_i - \vartheta_{W,i})\cdot A\cdot\alpha_i &= \dot{Q} \\
\vartheta_{W,i} &= \vartheta_i - \frac{\dot{Q}}{\alpha_i\cdot A} = 13,59\,°C
\end{aligned}$$

Die Annahme aus b) liegt nur $0,06\,K$ über diesem Ergebnis; die Temperaturdifferenz in der Grashof-Zahl war also um weniger als 1% falsch.