

**Aufgabe 3.5:** *Berechnung eines Wärmeübergangskoeffizienten*

Ein Körper mit der Oberfläche  $A = 1 \text{ m}^2$  und der Temperatur  $\vartheta_W = 30^\circ\text{C}$  wird mit Luft der Temperatur  $\vartheta_F = 10^\circ\text{C}$  (Druck  $p = 1 \text{ bar}$ ) angeströmt. Die Geschwindigkeit der Strömung beträgt in großer Entfernung vom Körper  $w_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Für den Körper gilt folgende Wärmeübergangsbeziehung:

$$Nu = 0,664 \cdot \sqrt{Re} \cdot \sqrt[3]{Pr}$$

wobei die Stoffwerte bei  $\vartheta_m = \frac{1}{2}(\vartheta_F + \vartheta_W)$  zu bestimmen sind. Die charakteristische Länge  $L$  beträgt  $10 \text{ cm}$ . Berechnen Sie den übertragenen Wärmestrom.

**Lösung:** *Berechnung eines Wärmeübergangskoeffizienten*

Stoffdaten der Luft bei  $\vartheta_m = 20^\circ\text{C}$

$$\lambda = 0,02569 \frac{\text{W}}{\text{K m}} \quad \nu = 153,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad Pr = 0,7148$$

Somit gilt:

$$Re = \frac{w_0 L}{\nu} = 32573 \quad \text{und} \quad Nu = 0,664 \cdot \sqrt{32573} \cdot \sqrt[3]{0,7148} = 107,15$$

Aus der Definition der Nusselt-Zahl folgt der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{L} = 27,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Der übertragene Wärmestrom berechnet sich dann folgendermaßen:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \Delta T = 550 \text{ W}$$

### Aufgabe 3.9: *Angeströmter Campingkocher*

Mit Hilfe eines Campinggaskochers soll ein zylinderförmiger Topf mit dem Durchmesser  $d = 20 \text{ cm}$  und der Höhe  $h = 30 \text{ cm}$  erwärmt werden. Der Topf ist vollständig mit Öl gefüllt. Die Gasflamme führt dem Öl durch den Topfboden einen Wärmestrom von  $\dot{Q} = 500 \text{ W}$  zu. Die Topfwand und der Deckel werden mit Luft der Geschwindigkeit  $w = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und der Temperatur  $\vartheta_{\text{Luft}} = 15^\circ\text{C}$  beim Druck  $p = 1 \text{ bar}$  umströmt. Das Öl hat eine gleichmäßige Temperaturverteilung. Die thermischen Widerstände durch Wärmeleitung in der Topfwand und durch den Wärmeübergang „Topfwand/Öl“ sollen vernachlässigt werden, d.h. der Topf mit Öl soll als „kleiner Körper“ behandelt werden, der überall, auch an seiner Oberfläche, eine einheitliche Temperatur besitzt.

- a) Berechnen Sie die Stoffwerte  $\nu$ ,  $Pr$ ,  $\lambda$  und  $c_p$  der Luft bei der Temperatur  $70^\circ\text{C}$ , die in ausreichender Näherung dem Mittelwert aus Topf- und Lufttemperatur entspricht. Berechnen Sie außerdem für die Umströmung des Deckels und der Seitenwand des Topfes jeweils die Reynoldszahl, die Nußeltzahl und den Wärmeübergangskoeffizienten. Als charakteristische Länge des Topfdeckels (ebene Platte) soll dabei der Durchmesser des Deckels verwendet werden. Welche Temperatur  $\vartheta_1$  stellt sich im Topf im stationären Zustand, das heißt nach Erreichen des Gleichgewichtszustands, ein?
- b) Wie lange dauert es (in Minuten), bis sich das Öl nach dem Ausschalten der Gasflamme auf  $\vartheta_2 = 30^\circ\text{C}$  abgekühlt hat, wenn nun zusätzlich auch der Topfboden von der Umgebungsluft umströmt wird?

$$\text{Stoffdaten des Öls:} \quad \rho_{\text{Öl}} = 914 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad c_{\text{Öl}} = 1,63 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

### Lösung: *Angeströmter Campingkocher*

- a) Zunächst müssen die Wärmeübergangskoeffizienten für den Deckel und den Zylindermantel bestimmt werden. Hierzu werden die Nußeltbeziehungen gemäß den Vorlesungsunterlagen ermittelt. Dafür sind zunächst die Stoffdaten zu bestimmen. Man findet durch lineare Interpolation für  $\vartheta = 70^\circ\text{C}$ :

$$c_p = 1009 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \quad \lambda = 0,0293 \frac{\text{W}}{\text{K m}} \quad \nu = 203,3 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad Pr = 0,7093$$

Mantel:

$$Nu = Nu_{\text{ruhend}} + \sqrt{Nu_{\text{lam}}^2 + Nu_{\text{turb}}^2} =$$
$$0,3 + \sqrt{\left(0,664 \sqrt{Re} \sqrt[3]{Pr}\right)^2 + \left(\frac{0,037 Re^{0,8} Pr}{1 + 2,443 Re^{-0,1} (Pr^{2/3} - 1)}\right)^2}$$

Mit

$$Re = \frac{wl}{\nu} = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{\pi d}{2}}{203,3 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 30905$$

folgt:

$$Nu = 0,3 + \sqrt{104,1^2 + 124,76^2} = 162,78$$

Somit ergibt sich als Wärmeübergangskoeffizient für den Zylindermantel:

$$\alpha_1 = \frac{Nu \lambda}{l} = \frac{Nu \lambda}{\frac{\pi}{2} d} = 15,2 \frac{W}{m^2 K}$$

Deckel:

$$\text{Reynoldszahl: } Re = \frac{w l}{\nu} = 19675$$

$$\text{Nußeltzahl: } Nu = 0 + \sqrt{83,06^2 + 87,81^2} = 120,87$$

$$\text{Wärmeübergangskoeffizient: } \alpha_2 = \frac{Nu \lambda}{d} = 17,71 \frac{W}{m^2 K}$$

Im stationären Fall muss die durch die Flamme zugeführte Wärme mittels Konvektion über den Zylindermantel und den Deckel wieder abgeführt werden. Aufgrund des verschwindenden Wärmeleitwiderstandes des Topfes und des ebenfalls zu null angenommenen Wärmeübergangswiderstandes *Topf/Öl* muss gelten:

$$\dot{Q} = \alpha_1 A_{Mantel} (T_{Oel} - T_{Luft}) + \alpha_2 A_{Deckel} (T_{Oel} - T_{Luft})$$

oder

$$\dot{Q} = (\alpha_1 A_{Mantel} + \alpha_2 A_{Deckel}) (T_{Oel} - T_{Luft})$$

Somit ergibt sich für  $\vartheta_{Oel}$  der folgende Zusammenhang:

$$\vartheta_{Oel} = \vartheta_1 = \vartheta_{Luft} + \frac{\dot{Q}}{\pi (\alpha_1 d h + \alpha_2 \frac{d^2}{4})} = 15^\circ C + 146,1 K = 161,1^\circ C$$

b) Der Erste Hauptsatz erhält für das vorliegende Problem folgende Form:

$$\rho_{Oel} V_{zyl} c_{Oel} \frac{dT}{dt} = \sum_i \dot{Q}_i = -(T(t) - T_{Luft}) \sum_i \alpha_i A_i$$

Die Änderung der inneren Energie ist gleich der über die Systemgrenze abgeführten Wärmen. Integration der letzten Gleichung:

$$\frac{dT}{T - T_{Luft}} = - \frac{\sum_i \alpha_i A_i}{\rho_{Oel} V_{zyl} c_{Oel}} dt$$

$$[\ln (T(t) - T_{Luft})]_{T_1}^{T_2} = - \left[ \frac{t \cdot \sum_i \alpha_i A_i}{\rho_{Oel} V_{zyl} c_{Oel}} \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\ln \left( \frac{T_1(t_1) - T_{Luft}}{T_2(t_2) - T_{Luft}} \right) = \frac{\sum_i \alpha_i A_i}{\rho_{Oel} V_{zyl} c_{Oel}} (t_2 - t_1)$$

Setzt man nun den Zeitpunkt  $t_1$ , an dem die Flamme abgeschaltet wurde, gleich null, so ergibt sich für  $t_2$ :

$$t_2 = \ln \left( \frac{T_1(t_1) - T_{Luft}}{T_2(t_2) - T_{Luft}} \right) \cdot \frac{\varrho_{Oel} V_{zyl} c_{Oel}}{\sum_i \alpha_i A_i}$$

Der zweite Faktor des letzten Ausdrucks berechnet sich zu:

$$\frac{\varrho_{Oel} V_{zyl} c_{Oel}}{\sum_i \alpha_i A_i} = \frac{\varrho_{Oel} \pi \frac{d^2}{4} h c_{Oel}}{\alpha_1 A_{Mantel} + 2\alpha_2 A_{Deckel}} = \frac{14041 \frac{J}{K}}{(2,86 + 1,11) \frac{W}{K}} = 3530 s$$

Es ergibt sich:

$$t_2 = \ln \left( \frac{161,1^\circ C - 15^\circ C}{30^\circ C - 15^\circ C} \right) \cdot 3530 s = 8036 s = 133,9 min$$

**Aufgabe 3.12:** *Versuche an einem vergrößerten Modell*

Es soll der mittlere Wärmeübergangskoeffizient an eine mit Chloroform überströmte kleine Kugel vom Durchmesser  $d_0$  bestimmt werden. Zu diesem Zweck werden Versuche mit Wasser an einer Kugel von zehnfachem Durchmesser bei dem Druck  $p = 1 \text{ bar}$  durchgeführt.

- Bei welcher Temperatur muss man die Versuche ausführen?
- Beim Chloroform-Experiment interessieren die Wärmeübergangskoeffizienten im Geschwindigkeitsbereich von  $0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  bis  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . In welchem Geschwindigkeitsbereich (Unter- und Obergrenze) sind die Versuche mit Wasser auszuführen?
- Im Versuch wird ein Wärmeübergangskoeffizient zu  $\alpha = 250 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$  bestimmt. Wie groß ist der Wärmeübergangskoeffizient an der mit Chloroform überströmten Kugel bei gleicher Nußelt- und Prandtl-Zahl?

Chloroform hat bei den Versuchsbedingungen folgende Eigenschaften:

$$\nu = 0,383 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad \lambda = 0,121 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad \text{Pr} = 4,5$$

**Lösung:** *Versuche an einem vergrößerten Modell*

- Ähnliche Versuchsbedingungen und somit gleiche Nußeltzahlen liegen vor, wenn Reynolds- und Prandtlzahl übereinstimmen. Die Prandtlzahl von Wasser ist stark temperaturabhängig. Durch lineare Interpolation bestimmt man, dass bei  $\vartheta = 38,3^\circ \text{C}$  gilt:  $\text{Pr} = 4,5$ .
- Bei den Versuchen mit Wasser muss die Geschwindigkeit so gewählt werden, dass sich dieselbe Reynoldszahl bei Verwendung von  $10 \cdot d_0$  als typischer Länge ergibt. Dazu ist es zunächst erforderlich, die kinematische Viskosität  $\nu_W$  bei der in a) berechneten Temperatur zu bestimmen. Durch lineare Interpolation bestimmt man:

$$\begin{aligned} \vartheta_W = 38,3^\circ \text{C} \quad \Rightarrow \quad \nu &= \left[ 0,724 + \frac{0,658 - 0,724}{5 \text{ K}} \cdot 3,3 \text{ K} \right] \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ &= 0,680 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \end{aligned}$$

Für die erste Geschwindigkeit  $w_{Ch} = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  folgt:

$$\begin{aligned} Re_{Ch} &= Re_W \\ \frac{w_{Ch} \cdot d_0}{\nu_{Ch}} &= \frac{w_W \cdot 10d_0}{\nu_W} \\ w_W &= \frac{w_{Ch}}{10} \cdot \frac{\nu_W}{\nu_{Ch}} = 0,0355 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Bei  $w_{Ch} = 2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ergibt sich entsprechend die zehnfache Geschwindigkeit:

$$w_W = 0,355 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Versuche müssen also im Geschwindigkeitsbereich von  $3,5 \frac{cm}{s}$  bis  $35,5 \frac{cm}{s}$  ausgeführt werden.

- c) Die Wärmeleitfähigkeit des Wassers  $\lambda_W$  bei  $\vartheta = 38,3^\circ C$  muss wiederum durch lineare Interpolation bestimmt werden; sie beträgt  $\lambda_W = 628,1 \cdot 10^{-3} \frac{W}{Km}$ . Da die Prandtl- und die Reynoldszahl gleich sind, müssen auch die Nusselt-Zahlen übereinstimmen:

$$\begin{aligned} Nu_{Ch} &= Nu_W \\ \frac{\alpha_{Ch} \cdot d_0}{\lambda_{Ch}} &= \frac{\alpha_W \cdot 10d_0}{\lambda_W} \\ \alpha_{Ch} &= 10 \cdot \alpha_W \cdot \frac{\lambda_{Ch}}{\lambda_W} = 482 \frac{W}{m^2 K} \end{aligned}$$