Aufgabe 2.8: *Härtung einer Stahlplatte*

Eine Stahlplatte mit der gleichmäßigen Temperatur $\vartheta_0 = 850\,°C$ und der Wandstärke $d = 0,05\,m$ wird durch schnelles Abkühlen gehärtet. Dieser Vorgang lässt sich vereinfacht berechnen, wenn man annimmt, dass der Platte zum Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich eine Oberflächentemperatur $\vartheta_S = 100\,°C$ aufgeprägt wird. Solange die Temperatur in der Plattenmitte nahezu konstant bleibt, lässt sich das instationäre Temperaturfeld in der Platte mit der Näherungslösung für den halbunendlichen Körper beschreiben.

Stoffdaten der Stahlplatte :

$\lambda = 52\,\frac{W}{m\,K}$ $\qquad c_p = 470\,\frac{J}{kg\,K}$ $\qquad \varrho = 7900\,\frac{kg}{m^3}$

a) Wie lange ist diese Beschreibung möglich? Hinweis: Die Temperatur in der Plattenmitte darf sich nur um maximal $1\,K$ ändern.

b) Wie dick wird die Härteschicht x_H, wenn für die gewünschte Gefügeumwandlung die Temperatur innerhalb einer Sekunde auf $\vartheta_2 = 300\,°C$ absinken muss?

c) Wann ist die Temperatur in der Plattenmitte auf $107,5\,°C$ abgesunken ?

Lösung: *Härtung einer Stahlplatte*

a) Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

hat für die Randbedingung

$$T = T_s \quad \text{für} \quad x_0 = 0 \text{ und alle } t > 0$$

und die Anfangsbedingung

$$T = T_0 \quad \text{für} \quad t_0 = 0 \text{ und alle } x > 0$$

die Lösung:

$$\frac{T\,(x,t) - T_0}{T_s - T_0} = \operatorname{erfc}\frac{x}{\sqrt{4at}}$$

wobei die erfc-Funktion tabelliert ist.

Es gilt

$$a = \frac{\lambda}{c_p\,\varrho} = \frac{52\,\frac{W}{m\,K}}{7900\,\frac{kg}{m^3}\cdot 470\,\frac{J}{kg\,K}} = 1,4\cdot 10^{-5}\frac{m^2}{s}.$$

Die Temperatur in der Plattenmitte wird als nahezu konstant angesehen, solange sie sich nur um maximal $1\,K$ (Aufgabenstellung) ändert.

Gesucht ist die Zahl $z = \frac{x}{\sqrt{4at}}$ mit

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{T\,(x,t) - T_0}{T_s - T_0} = \frac{-1}{-750} = 0,001333.$$

Lineare Interpolation ergibt wegen

$$\begin{aligned}
\operatorname{erfc}(2,2) &= 0,001863 \\
\operatorname{erfc}(z) &= 0,001333 \\
\operatorname{erfc}(2,3) &= 0,001143 \\
z &= 2,2 + (2,3-2,2)\,\frac{\operatorname{erfc}(2,2)-\operatorname{erfc}(z)}{\operatorname{erfc}(2,2)-\operatorname{erfc}(2,3)} = 2,2736 \\
\Rightarrow & \quad \frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}} = 2,2736 \quad \Rightarrow \quad t = 2,16\,s
\end{aligned}$$

Die Näherungslösung ist also in den ersten 2 bis 3 Sekunden gültig.

b) Wie in a) berechnet, kann man die Näherungslösung für den halbunendlichen Körper verwenden. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\frac{T(x,t)-T_0}{T_s-T_0} &= \operatorname{erfc}\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}} \\
\frac{300\,°C-850\,°C}{100\,°C-850\,°C} = \frac{-550\,K}{-750\,K} = \frac{11}{15} = 0,7\bar{3} &= \operatorname{erfc}\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}}
\end{aligned}$$

Lineare Interpolation ergibt

$$\operatorname{erfc}(0,241) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}}\right) = 0,7\bar{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}} = 0,241 \quad \Rightarrow \quad x_H = 0,241\sqrt{4\,a\,t} = 1,8\cdot 10^{-3}\,m = 1,8\,mm.$$

c) Obwohl das Gröber-Diagramm für die Randbedingung 3. Art gedacht ist, ist der Grenzfall $\alpha L >> \lambda$ (d.h. $\frac{1}{Bi} \longmapsto 0$) mit enthalten. Dieser Grenzfall entspricht der Randbedingung 1. Art, wobei T_c der Temperatur in der Plattenmitte, T_∞ der Oberflächentemperatur T_S und T_i der Anfangstemperatur T_0 entspricht. Somit gilt

$$\frac{T_c-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \frac{7,5\,K}{750\,K} = 0,01.$$

Für $\frac{1}{Bi} = 0$ findet man $Fo = 2$, d.h.

$$\frac{at}{L^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad t = 89,3\,s.$$

Aufgabe 2.10: *Wärmeleitung im Topfgriff*

An einem Topf befindet sich ein stabförmiger Griff der Länge $L = 25\,cm$. Er ist mit einer guten Isolierung umgeben und hat zu Beginn die konstante Temperatur $\vartheta_0 = 20\,°C$. Der Griff besteht aus einem Material mit den folgenden Eigenschaften:

$$\lambda = 100\,\frac{W}{m\,K} \qquad c_p = 200\,\frac{J}{kg\,K} \qquad \varrho = 5000\,\frac{kg}{m^3}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird der Topf plötzlich mit siedendem Wasser der Temperatur $\vartheta_1 = 100\,°C$ gefüllt. Ein Tauchsieder hält das Wasser am Sieden. Die Temperatur ϑ_1 wird dem entsprechenden Ende des Griffes aufgeprägt, d.h. der thermische Widerstand $\frac{1}{\alpha}$ zwischen Wasser und Griff ist nahezu null.

a) Für welchen Zeitraum kann man die eindimensionale Wärmeleitung im Griff mit der Näherung für einen halbunendlichen Körper rechnen?

b) Welche Temperatur ϑ_2 liegt nach $t_2 = 5\,s$ in $4,472\,cm$ Entfernung vom Topf vor?

c) Nach welcher Zeit erreicht das vom Topf entfernte Ende des Griffes die Temperatur $\vartheta_3 = 96\,°C$?

Hinweis: Überlegen Sie, welche Eigenschaften eine Platte haben muss, damit in ihr derselbe Temperaturverlauf herrscht, d.h. betrachten Sie den Topfgriff als Teil einer Platte!

Lösung: *Wärmeleitung im Topfgriff*

Wegen der adiabaten Ränder entspricht das Problem exakt dem einer Platte der Dicke $2L$, die an beiden Seiten mit einem nahezu unendlichen Wärmeübergangskoeffizienten geheizt wird.

a)

$$a = \frac{\lambda}{\varrho\, c_p} = 1 \cdot 10^{-4}\,\frac{m^2}{s}$$

Die Näherung ist gerechtfertigt, solange sich die Temperatur in der Mitte T_C nur unwesentlich ändert, zum Beispiel um $0,5K$. Dann gilt:

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}}\right) = \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{0,5}{80} = 0,00625$$

Durch lineare Interpolation bestimmt man, dass für $z = 1,938$ die Gleichung $\operatorname{erfc}(z) = 0,00625$ erfüllt ist. Folglich gilt

$$\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}} = 1,938 \quad \Leftrightarrow \quad t = \left(\frac{x}{1,938}\right)^2 \frac{1}{4a} = 41,6\,s$$

Die Näherungslösung ist also in den ersten 30 bis 50 Sekunden gültig.

b) Zur Zeit $t = 5\,s$ kann nach Teil a) mit der Näherungslösung gerechnet werden:

$$\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}}\right) = \frac{T\,(x,t) - T_0}{T_1 - T_0}$$

Wegen $\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}} = 1$ gilt:

$$\frac{T\,(x,t) - T_0}{T_1 - T_0} = \text{erfc}(1) = 0,157299$$

$$\Rightarrow\ T\,(x,t) = T_0 + 0,157299\ (T_1 - T_0) \Rightarrow \quad \vartheta(x,t) = 32,58\,°C$$

c) Aus dem Gröber-Diagramm erhält man für

$$\frac{1}{Bi} \longmapsto 0 \quad \text{und} \quad \frac{T_C - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{4K}{80K} = 0,05 \quad :$$

$$Fo \approx 1,3 \quad \text{d.h.} \quad \frac{a\,t}{L^2} = 1,3 \quad \Rightarrow \quad t = 812\,s = 13,5\,min$$

Aufgabe 2.11: *Erwärmung einer Stahlplatte*

Eine ebene quadratische Stahlplatte von $100\,mm$ Dicke und $10\,m^2$ Fläche besitzt zur Zeit $t_0 = 0$ die gleichmäßige Temperatur $\vartheta_0 = 10\,°C$. Sie wird in einem Glühofen bei $\vartheta_{Umg.} = 800\,°C$ erwärmt. Die Wärmezufuhr erfolgt von beiden Seiten mit einem Wärmeübergangskoeffizienten von $\alpha = 15\,\frac{W}{m^2\,K}$.
Stoffwerte für die Stahlplatte:

$$\lambda = 15\,\frac{W}{m\,K} \qquad c_p = 500\,\frac{J}{kg\,K} \qquad \varrho = 7700\,\frac{kg}{m^3}$$

a) Nach welcher Zeit t_1 beträgt die Temperatur in der Plattenmitte $563\,°C$?

b) Welche Temperatur (in $°C$)hat die Stahlplatte dann an der Oberfläche?

c) Wie ändert sich die Aufwärmzeit aus Teil a), wenn der Wärmeübergangskoeffizient z.B. durch den Einsatz eines Gebläses verdoppelt wird?

d) Wie würde sie sich ändern, wenn man (bei dem ursprünglichen Wärmeübergangskoeffizienten) die Wärmeleitfähigkeit der Stahlplatte verdoppeln könnte?

Lösung: *Erwärmung einer Stahlplatte*

a) Die Biot-Zahl wird wie folgt berechnet:

$$Bi = \frac{\alpha\,L}{\lambda} = \frac{15\,\frac{W}{m^2\,K}\,0,05\,m}{15\,\frac{W}{m\,K}} = 0,05 \;\Rightarrow\; \frac{1}{Bi} = 20$$

$$\frac{T_c - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{\vartheta_c - \vartheta_\infty}{\vartheta_i - \vartheta_\infty} = \frac{563 - 800}{10 - 800} = \frac{-237}{-790} = 0,3$$

Aus dem Gröber-Diagramm entnimmt man:

$$\frac{1}{Bi} = 20 \quad \text{und} \quad \frac{T_c - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0,3$$

$$\Rightarrow \quad Fo = \frac{a\,t}{L^2} = 25,5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a\,t}{L^2} = \frac{\lambda\,t}{c_p\,\varrho\,L^2} = 25,5$$

$$\Rightarrow \quad t = 16360\,s = 4\,h\,33\,min = 273\,min$$

b) Für $\frac{1}{Bi} = 20$ und $\frac{x}{L} = 1$ (d.h. an der Oberfläche) ergibt sich graphisch:

$$\frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty} = 0,975$$

$\Rightarrow \vartheta = \vartheta_\infty + 0,975\,(\vartheta_c - \vartheta_\infty) = 569\,°C$, also nur $6\,K$ mehr als in der Plattenmitte .

c) Doppelter Wärmeübergangskoeffizient bedeutet $\frac{1}{Bi} = 10$. Das Gröber-Diagramm ergibt für

$$\frac{T_c - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0,3$$

einen Wert von $Fo = 13$.

$$\Rightarrow \; t = 8342\,s = 2\,h\,19\,min = 139\,min$$

d) Doppelte Wärmeleitfähigkeit bedeutet $\frac{1}{Bi} = 40$. Das Gröber-Diagramm ergibt in diesem Fall $Fo = 50$.

$$\Rightarrow \; t = 16042\,s = 4\,h\,27\,min = 267\,min$$