Aufgabe 2.1: *Problem bei Rohrisolierungen*

Ein Heißwasserrohr mit dem Außendurchmesser $d_a = 3\,cm$ und der Länge $L = 5\,m$ führt durch einen Raum, wobei Wärmeverluste durch Wärmeabgabe an die Luft auftreten. Um diese zu verringern, soll das Rohr isoliert werden. Die Temperatur an der Rohroberfläche ist in sehr guter Näherung identisch mit der Temperatur des heißen Wassers im Rohrinneren (d.h. der thermische Widerstand zwischen Wasser und Rohraußenwand ist vernachlässigbar klein). Der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Rohroberfläche und Außenluft beträgt

$$\alpha = \frac{K}{r^m} \quad \text{mit} \quad K = 3,35\,\frac{W}{m^{1,5}\,K} \quad \text{und} \quad m = 0,5$$

Das Rohr soll mit einer $1\,cm$ dicken Isolierschicht umgeben werden, so dass sich der Durchmesser auf $d_2 = 5\,cm$ vergrößert.

a) Welche Wärmeleitfähigkeit darf das Material höchstens haben, damit die Wärmeverluste verkleinert werden?

b) Welches ist für diese Wärmeleitfähigkeit der kritische Radius?

Lösung: *Problem bei Rohrisolierungen*

a) Beim Radius $r_1 = 1,5\,cm$ gilt für den Wärmeübergangswiderstand R_1:

$$R_1 = \frac{1}{A_1\,\alpha} = \frac{r_1^{0,5}}{2\,\pi\,r_1\,L\,K} = \frac{1}{2\pi LK\sqrt{r_1}}$$

Beim Radius $r_2 = 2,5\,cm$ gilt für den thermischen Gesamtwiderstand R_2 (Wärmeleitwiderstand der Isolierung plus Wärmeübergangswiderstand):

$$R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{2\pi LK\sqrt{r_2}}$$

Bei einer bestimmten Wärmeleitfähigkeit λ werden beide Widerstände gleich sein. Dies ist die gesuchte Wärmeleitfähigkeit; bei geringeren Wärmeleitfähigkeiten sinkt der Wärmestrom, bei größeren steigt er an. Es gilt also, die folgende Gleichung nach λ aufzulösen:

$$R_1 = R_2$$

$$\frac{1}{2\pi LK\sqrt{r_1}} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{2\pi LK\sqrt{r_2}}$$

$$\frac{1}{K\sqrt{r_1}} - \frac{1}{K\sqrt{r_2}} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{K \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{\sqrt{r_2}}} = 0,9298\,\frac{W}{m\,K}$$

Ein Stoff mit größerer Wärmeleitfähigkeit ist als Rohrisolierung in dem gegebenen Fall ungeeignet; dazu zählen alle Metalle und auch zahlreiche andere Stoffe. Handelsübliche Isoliermaterialien haben natürlich eine geringere Wärmeleitfähigkeit und erfüllen auch in dem vorliegenden Fall ihren Zweck.

b) Der kritische Radius für die oben berechnete Wärmeleitfähigkeit berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} r_{krit} &= \left(\frac{K}{(1-m)\lambda}\right)^{\frac{1}{m-1}} = \left(\frac{2K}{\lambda}\right)^{\frac{1}{-0,5}} \\ &= \left(\frac{\lambda}{2K}\right)^2 = 0,0193\,m \end{aligned}$$

Bei kontinuierlicher Vergrößerung des Radius r durch Anbringen einer Rohrummantelung mit dem berechneten λ sinkt der thermische Widerstand R, bis der kritische Radius erreicht ist. Bei weiterer Vergrößerung steigt er wieder an, um schließlich bei $r = 0,025\,m$ den Ausgangswert zu erreichen. Bei noch größeren Radien würde sich eine weitere Vergrößerung des Widerstandes ergeben.

Aufgabe 2.3: *Temperatur in einer Hohlkugel*

Im Inneren einer Hohlkugel mit den Durchmessern $d_1 = 0,15\,m$, $d_2 = 0,25\,m$ und der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0,68\,\frac{W}{Km}$ wird der Wärmestrom $\dot{Q} = 17,5\,W$ erzeugt. Die äußere Kugeloberfläche hat die Temperatur $\vartheta_{w2} = 28\,°C$.

Welche Temperatur ϑ_{w1} nimmt die innere Oberfläche an?

Lösung: *Temperatur in einer Hohlkugel*

Es gilt: $\dot{Q} = (\vartheta_{w1} - \vartheta_{w2})\,\frac{1}{R_{Kugel}}$ und mit $R_{Kugel} = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda}$

$$
\begin{aligned}
\text{folgt daraus:} \quad \vartheta_{w1} &= \vartheta_{w2} + \dot{Q}\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda} \\
&= 28\,°C + 17,5\,W\,\frac{\frac{2}{0{,}15} - \frac{2}{0{,}25}}{4\pi 0,68\,\frac{W}{K}} \\
&= 38,9\,°C
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.4: *Beheizter Hohlzylinder im Satelliten*

Im Inneren eines sehr langen Hohlzylinders wird durch radioaktiven Zerfall der auf die Zylinderlänge L bezogene Wärmestrom $\frac{\dot{Q}}{L} = 550\,\frac{W}{m}$ erzeugt. Der Hohlzylinder besteht aus legiertem Stahl mit einer Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 15\,\frac{W}{Km}$. Er hat den Innendurchmesser $d_i = 20\,mm$ und die Wandstärke $\delta = 10\,mm$. An seiner äußeren Oberfläche wird Wärme nur durch Strahlung in den Weltraum ($T_u = 0\,K$) abgegeben. Der Emissionsgrad der Zylinderoberfläche ist $\varepsilon = 0,17$.

Berechnen Sie die Temperaturen ϑ_i der inneren und ϑ_a der äußeren Oberfläche.

Lösung: *Beheizter Hohlzylinder im Satelliten*

Nach dem Gesetz von Stefan-Boltzmann gilt für den Strahlungsaustausch des grauen Strahlers (Zylindermantel) mit dem umgebenden schwarzen Strahler (Weltraum) folgender Zusammenhang:

$$\dot{Q} = A \cdot \sigma \cdot \varepsilon \left(T_a^4 - T_u^4\right)$$

Daraus kann ϑ_a berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\vartheta_a &= T_a - 273,15\,K = \sqrt[4]{\frac{\dot{Q}}{L}\frac{1}{\pi(d_i + 2\delta)\sigma\varepsilon} + T_u^4} - 273,15\,K \\
&= \sqrt[4]{550\,\frac{W}{m}\,\frac{1}{\pi(0,02\,m + 2 \cdot 0,01\,m)5,67 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4} \cdot 0,17} + T_u^4} \;\; - 273,15\,K \\
&= 547,73\,°C
\end{aligned}$$

Für die Wärmeleitung im Hohlzylinder gilt folgendes:

$$\dot{Q} = (\vartheta_i - \vartheta_a)\,\frac{1}{R_{Zylinder}} \qquad \text{und mit} \qquad R_{Zylinder} = \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\pi\lambda L}$$

$$\begin{aligned}
\text{folgt daraus:} \qquad \vartheta_i &= \frac{\dot{Q}}{L} \cdot \frac{\ln\left(\frac{d_i+2\delta}{d_i}\right)}{2\pi\lambda} + \vartheta_a \\
&= 550\,\frac{W}{m}\,\frac{\ln\frac{0,04}{0,02}}{2\pi 15\,\frac{W}{Km}} + 547,73\,°C = 551,77\,°C
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.5: *Stationäre Wärmeleitung in Längsrichtung eines Stahlbolzens*

Ein zylinderförmiger Stahlbolzen mit $\lambda = 52,5\,\frac{W}{Km}$, dem Durchmesser $d = 0,06\,m$ und der Länge $L = 0,2\,m$ ragt aus einer Platte heraus, die die Temperatur $\vartheta_0 = 60\,°C$ hat. Über seine Mantelfläche und die freie Stirnfläche fließt ein Wärmestrom an die Luft, die die Temperatur $\vartheta_u = 12,5\,°C$ besitzt, wobei der Wärmeübergangskoeffizient für beide Flächen den Wert $\alpha = 8,0\,\frac{W}{m^2K}$ annimmt.

a) Berechnen Sie den Wärmestrom $\dot{Q}_0$, der vom Stahlbolzen an die Luft abgegeben wird.

b) Welche Temperatur nimmt die freie Stirnfläche des Stahlbolzens an?

Hinweis

Für einen Stab der Länge L mit der Querschnittsfläche A_q und dem konstanten Umfang U, der auf der einen Seite durch Wärmezufuhr auf konstanter Temperatur ϑ_0 gehalten wird und auf der Mantelfläche und auf der Stirnseite konvektiv Wärme an die Luft abgibt, gelten folgende Beziehungen:

Für die dimensionslose Temperatur ϑ^+ längs des Stabes gilt

$$\vartheta^+(x) = \frac{\cosh(m(L-x)) + \frac{\alpha}{m\lambda}\sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda}\sinh(mL)}$$

mit

$$\vartheta^+ = \frac{\vartheta - \vartheta_u}{\vartheta_0 - \vartheta_u} \qquad \text{und} \qquad m^2 = \frac{\alpha U}{\lambda A_q}$$

Für die Wärmezufuhr gilt:

$$\dot{Q}_0 = \sqrt{\alpha\lambda A_q U}(\vartheta_0 - \vartheta_u)\frac{\tanh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda}}{1 + \frac{\alpha}{m\lambda}\tanh(mL)}$$

Lösung: *Stationäre Wärmeleitung in Längsrichtung eines Stahlbolzens*

a) Für den Wärmestrom erhält man mit $U = \pi d$ und $A_q = \pi\frac{d^2}{4}$

$$\dot{Q}_0 = \frac{\pi}{2}d\sqrt{\alpha\,\lambda\,d}(\vartheta_0 - \vartheta_u)\frac{\tanh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda}}{1 + \frac{\alpha}{m\lambda}\tanh(mL)}$$

Dabei ist

$$mL = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda d}}\;L = 0,6375 \qquad \text{und} \qquad \frac{\alpha}{m\lambda} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha d}{\lambda}} = 0,0478.$$

Somit wird $\dot{Q}_0 = 13,3\,W$.

b) Die Temperatur an der Bolzenstirnfläche berechnet sich mit $x = L$ entsprechend cosh 0 =1 und sinh 0 = 0:

$$\vartheta^+(x) = \frac{1}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda}\sinh(mL)} = 0,8047$$

Daraus folgt dann:

$$\vartheta_L = \vartheta_u + (\vartheta_0 - \vartheta_u)\vartheta_L^+ = 50,7\,^\circ C$$