

Seminargruppe WuSt

Aufgabe 5.10: *Trocknung einer Wandtafel*

Eine Wandtafel (1,8 m hoch und 3 m breit) wird mit einem feuchten Lappen abgewischt, so dass auf der Tafel ein dünner Wasserfilm zurückbleibt, der innerhalb von 5 min abtrocknet.

- Wie dick war der Film?
- Fensterlüftung (Durchzug) bewirkt einen Luftstrom mit $w_L = 3 \text{ m/s}$ entlang der Tafel. Wird die Trocknungszeit beeinflusst?
- Kann im Fall b) das Gesetz von Lewis angewendet werden?

Temperatur des Wasserfilms:	$\vartheta = 25^\circ\text{C}$
Lufttemperatur:	$\vartheta = 25^\circ\text{C}$
Luftdruck:	$p = 1 \text{ bar}$
Wasserdampfpartialdruck der Luft:	$p_W = 0,016 \text{ bar}$

Stoffwerte des Wassers:

Dampfdruck bei 25°C :	$p_{s,W} = 0,032 \text{ bar}$
Dichte:	$\rho_W = 1 \text{ g/cm}^3$
Molmasse:	$M_W = 18 \text{ g/mol}$

Stoffwerte der Luft:

Dichte:	$\rho_L = 1,17 \text{ kg/m}^3$
Molmasse:	$M_L = 29 \text{ g/mol}$
kinematische Viskosität:	$\nu_L = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Wärmeleitfähigkeit:	$\lambda_L = 0,0264 \text{ W/mK}$
spezifische isobare Wärmekapazität:	$c_{p,L}^0 = 1 \text{ J/gK}$
Prandtlzahl:	$Pr_L = 0,7$
Diffusionskoeffizient Wasserdampf/Luft	$D = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

Auszug aus dem VDI-Wärmeatlas:

Freie Konvektion an senkrechten Wänden:

$$Nu = 0,52 \cdot \sqrt[4]{Gr \cdot Pr} \quad \text{für } Gr \cdot Pr < 10^8$$

$$Nu = 0,10 \cdot \sqrt[3]{Gr \cdot Pr} \quad \text{für } Gr \cdot Pr > 10^9$$

Erzwungene Strömung entlang ebener Wände:

$$Nu = 0,664 \cdot Re^{0,5} \cdot \sqrt[3]{Pr} \quad \text{für } Re < 10^5$$

$$Nu = 0,057 \cdot (Re \cdot Pr)^{0,78} \quad \text{für } Re > 5 \cdot 10^5$$

Lösung: *Trocknung einer Wandtafel*

- a) Da es sich bei dem Stoffübergangsproblem um freie Konvektion an einer senkrechten Wand (charakteristische Länge $l = 1,8\text{ m}$) handelt, muss die aus der Wärmeübertragung bekannte Grashofzahl in die Grashofzahl 2. Art überführt werden:

$$Gr \longrightarrow Gr' = \frac{M_B - M_A}{p_{A,m} M_A + (p - p_{A,m}) M_B} \frac{l^3 g}{\nu^2} |p_{A,W} - p_{A,0}|$$

wobei der Druckmittelwert $p_{A,m}$ als arithmetisches Mittel aus Wandpartial- und Partialdruck innerhalb des Fluids gebildet wird:

$$p_{A,m} = \frac{p_{A,W} + p_{A,0}}{2}$$

Bei dem hier vorliegenden Problem gilt nun:

$$\begin{aligned} p_{A,W} &= p_{s,W}(25^\circ\text{C}) = 0,032\text{ bar} \\ p_{A,0} &= p_W = 0,016\text{ bar} \\ p_{A,m} &= \frac{p_{A,W} + p_{A,0}}{2} = 0,024\text{ bar} \end{aligned}$$

Somit folgt als Grashof-Zahl (2. Art):

$$Gr' = \frac{9,81\text{ m/s}^2 (1,8\text{ m})^3}{(1,5 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s})^2} \cdot \frac{(29 - 18) \cdot (0,032 - 0,016)}{0,024 \cdot 18 + (1 - 0,024) \cdot 29} = 1,557 \cdot 10^9$$

Anstelle der Prandtl-Zahl der Wärmeübertragung benötigt man noch die Schmidt-Zahl:

$$Pr = \frac{\nu_L}{a} \longrightarrow Sc = \frac{\nu_L}{D} = 0,75$$

Es folgt für das Produkt aus Gr' und Sc

$$Gr' \cdot Sc = 1,168 \cdot 10^9 > 10^9$$

Das heißt die Strömung ist turbulent.

Berücksichtigt man diese Tatsache, so erhält man zunächst als Sherwood-Zahl

$$Nu(Pr, Gr) \longrightarrow Sh(Sc, Gr') = 0,10 \cdot \sqrt[3]{1,168 \cdot 10^9} = 105,3$$

Für den Stoffübergangskoeffizienten folgt somit:

$$\beta = \frac{Sh \cdot D}{l} = \frac{105,3 \cdot 2 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}}{1,8\text{ m}} = 1,17 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Da die Filmoberfläche eine halbdurchlässige Wand darstellt, muss der Stoffübergangskoeffizient β durch $\beta_{\text{einseitig}}$ ersetzt werden. Dieses ist ein rein formaler Vorgang, da man mit Hilfe von $\beta_{\text{einseitig}}$ einen formal linearen Transportansatz für das verdunstende Wasser gewinnt.

$$\beta_{\text{einseitig}} = \beta \cdot \frac{1\text{ bar}}{(0,032 - 0,016)\text{ bar}} \cdot \ln\left(\frac{1 - 0,016}{1 - 0,032}\right) = 1,20 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Es ergibt sich somit folgender scheinbar linearer Transportansatz für das Wasser:

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = \frac{\beta_{\text{einseitig}} \cdot M_W}{\mathcal{R}T} (p_{s,W} - p_W) =$$

$$\frac{1,20 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \cdot 18 \text{ g/mol}}{8,3143 \text{ J/mol K} \cdot 298,15 \text{ K}} (0,032 - 0,016) \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 0,01393 \frac{\text{g}}{\text{s m}^2}$$

Das gleiche Ergebnis hätte man natürlich auch unter sofortiger Verwendung des logarithmischen Transportansatzes erhalten,

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = \frac{D}{\delta} \cdot \frac{M_A}{\mathcal{R}T} \cdot p \cdot \ln \left(\frac{p - p_{A,0}}{p - p_{A,W}} \right)$$

wenn man nur den Quotienten D/δ durch den Stoffübergangskoeffizienten β ersetzt hätte!

Die Filmdicke d_{Film} ergibt sich nun mit Hilfe der Beziehung

$$m_{\text{Film}} = \varrho_W \cdot A \cdot d_{\text{Film}} = \dot{m}_W \cdot t$$

zu

$$d_{\text{Film}} = \frac{\frac{\dot{m}_W}{A} \cdot t}{\varrho_W} = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,0042 \text{ mm}$$

- b) Bei dem nun vorliegenden Problem handelt es sich um erzwungene Strömung entlang einer ebenen Wand mit der charakteristischen Länge $l = 3 \text{ m}$. Die Reynolds-Zahl ergibt sich zu:

$$Re = \frac{w_L \cdot l}{\nu_L} = 6 \cdot 10^5 > 5 \cdot 10^5$$

Die Strömung ist demnach turbulent. Es gilt erneut die Analogie zwischen Wärme- und Stoffübergang:

$$Nu(Re, Pr) \longrightarrow Sh(Re, Sc)$$

und somit

$$Sh = 0,057 \cdot (Re \cdot Sc)^{0,78} = 0,057 \cdot (6 \cdot 10^5 \cdot 0,75)^{0,78} = 1463$$

Für diesen Fall berechnen sich β bzw. $\beta_{\text{einseitig}}$ völlig analog Teil a) zu

$$\beta = 9,76 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \beta_{\text{einseitig}} = 0,0100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Geht man von der in a) berechneten Filmdicke d_{Film} aus so ergibt sich für die Zeit t^* , die verstreicht bis die Tafel abgetrocknet ist,

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = 0,1161 \frac{\text{g}}{\text{s m}^2} = \frac{\varrho_W d_{\text{Film}}}{t^*} \Rightarrow t^* = 36 \text{ s} = 0,6 \text{ min}$$

- c) Das Gesetz von Lewis sagt bei erzwungenen Strömungen folgendes Verhältnis voraus:

$$\beta = \frac{\alpha}{\varrho \cdot c_p} \quad \text{falls} \quad \underbrace{\left(\frac{\alpha}{D} \right)^{n-1}}_{\text{Lewiszahl}} \approx 1$$

Mit Hilfe der angegebenen Nusseltbeziehung lässt sich der Wärmeübergangskoeffizient α für das vorliegende Problem berechnen:

$$Nu = 0,057 (Re \cdot Pr)^{0,78} \Rightarrow Nu = 0,057 (6 \cdot 10^5 \cdot 0,7)^{0,78} = 1378$$

Es ergibt sich für α

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda_L}{l} = 12,2 \frac{W}{m^2 K}$$

Nun kann man mit Hilfe des Gesetzes von Lewis den Stoffübergangskoeffizienten β bestimmen:

$$\beta = \frac{\alpha}{\varrho \cdot c_p} = \frac{12,2 \frac{W}{m^2 K}}{1,17 \frac{kg}{m^3} \cdot 1000 \frac{J}{kg K}} = 0,0104 \frac{m}{s}$$

Die Übereinstimmung mit dem zuvor berechneten Wert ist somit „hinreichend“ genau.

Hinweis: Es gilt

$$a = \frac{\lambda}{\varrho c_p} = \frac{0,0264 \frac{W}{m K}}{1,17 \frac{kg}{m^3} \cdot 1000 \frac{J}{kg K}} = 2,26 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$\left(\frac{a}{D}\right)^{1-n} = \left(\frac{2,26 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-5}}\right)^{1-0,78} = 1,027 \approx 1$$

Aufgabe 5.12: *Schwimmbecken*

Das Wasser in einem Schwimmbecken soll trotz des Stoff- und Wärmeaustausches an der Wasseroberfläche durch Beheizung auf $\vartheta_W = 20^\circ\text{C}$ gehalten werden. Der Stoff- und Wärmeaustausch wird durch Wind begünstigt, der mit $w = 3,3\text{ m/s}$ in Richtung der langen Beckenkante weht. Die Veränderung des Luftzustandes soll vernachlässigt werden. Die Beckenoberfläche soll 5 m lang und 4 m breit sein. Mit Ausnahme der Wasseroberfläche sollen alle weiteren Beckenflächen ideal isoliert sein, das heißt sowohl für Stoff- als auch für Wärmeströme undurchlässig sein.

Berechnen Sie die Reynoldszahl, den Wärmeübergangskoeffizienten α und den daraus folgenden Wärmestrom \dot{Q}_α , den Stoffübergangskoeffizienten β und den daraus folgenden Stoffstrom \dot{m} sowie die Heizleistung, die notwendig ist, um die Temperatur im Schwimmbecken konstant zu halten!

Luftzustand:

Temperatur:	$\vartheta_L = 10^\circ\text{C}$
Luftdruck (Gesamtdruck):	$p_{ges} = 1\text{ bar}$
kinematische Viskosität:	$\nu_L = 1,5 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$
Wärmeleitfähigkeit:	$\lambda_L = 0,026\text{ W/mK}$
Prandtlzahl:	$Pr_L = 0,7$
Wasserdampfpartialdruck:	$p_{W,L} = 0,01\text{ bar}$
Diffusionskoeffizient Wasser/Luft	$D = 2,4 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$
Schmidt-Zahl ($= \nu/D$):	$Sc = 0,625$

Wasserzustand:

Dampfdruck bei 20°C :	$p_{s,W} = 0,023\text{ bar}$
Verdampfungsenthalpie bei 20°C :	$\Delta h_V = 2450\text{ J/g}$
Molmasse des Wassers:	$M_W = 18\text{ g/mol}$

Wärmeübergang:

$$Nu = 0,664 \cdot Re^{0,5} \cdot \sqrt[3]{Pr} \quad \text{für } Re < 10^5$$

$$Nu = \frac{0,037 \cdot Pr \cdot Re^{0,8}}{1 + 2,443 \cdot Re^{-0,1} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \quad \text{für } 5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$$

Als charakteristische Länge ist die Beckenlänge in Strömungsrichtung der überstreichenen Luft zu wählen.

Lösung: Schwimmbecken

i) Wärmeübergang

Da das Schwimmbecken von Luft überströmt wird, handelt sich um einen erzwungenen konvektiven Wärmeübergang. Zunächst muss die Reynoldszahl berechnet werden, um eine Aussage darüber zu treffen, ob es sich um eine turbulente Strömungsform handelt.

$$Re = \frac{w \cdot l}{\nu_L} = \frac{3,3 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ m}}{1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,1 \cdot 10^6$$

Die Nußeltbeziehung lautet somit:

$$Nu = \frac{0,037 \cdot Pr \cdot Re^{0,8}}{1 + 2,443 \cdot Re^{-0,1} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} = 2,04 \cdot 10^3$$

Der Wärmeübergangskoeffizient α errechnet sich somit zu:

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda_l}{l} = 10,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Der Wärmestrom infolge des konvektiven Wärmeüberganges \dot{Q}_α berechnet sich also zu

$$\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot A \cdot (T_W - T_L) = 10,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 20 \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ K} = 2120 \text{ W}$$

ii) Stoffübergang

Der Stoffübergang bei der erzwungenen Konvektion berechnet sich analog zu dem Wärmeübergang. Lediglich die Prandtl-Zahl der Nußelt-Beziehung muss durch die Schmidt-Zahl in der Bestimmungsgleichung für die Sherwood-Zahl ersetzt werden.

$$Nu(Re, Pr) \longrightarrow Sh(Re, Sc)$$

Da die Reynolds-Zahl von oben übernommen werden kann $Re = 1,1 \cdot 10^6$ und die Schmidt-Zahl mit $Sc = \nu / D = 0,625$ angegeben ist, gilt:

$$Sh = \frac{0,037 \cdot Sc \cdot Re^{0,8}}{1 + 2,443 \cdot Re^{-0,1} \cdot (Sc^{2/3} - 1)} = 1,88 \cdot 10^3$$

Für den Stoffübergangskoeffizienten β ergibt sich nun

$$Sh = \frac{\beta \cdot l}{D} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{Sh \cdot D}{l} = 9,02 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Da das mit Luft gesättigte Wasser eine Sperrschicht darstellt, muss anstelle von β $\beta_{\text{einseitig}}$ benutzt werden, da dies den logarithmischen Transportansatz implizit mitberücksichtigt:

$$\beta_{\text{einseitig}} = \beta \cdot \frac{p_{\text{ges}}}{p_{s,W} - p_{W,L}} \cdot \ln \left(\frac{1 \text{ bar} - p_{W,L}}{1 \text{ bar} - p_{s,W}} \right) =$$
$$\beta \cdot \frac{1 \text{ bar}}{(0,023 - 0,010) \text{ bar}} \cdot \ln \left(\frac{1 - 0,010}{1 - 0,023} \right) = 9,17 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Man kann nun den Teilchenstrom mit Hilfe des folgenden Transportansatzes berechnen:

$$\dot{N}_W = \frac{\beta_{\text{einseitig}} \cdot A}{\mathcal{R}T} (p_{s,W} - p_{W,L})$$

Den hiermit verbundenen Massenstrom \dot{m}_W kann man mit Hilfe der Beziehung

$$\dot{m}_W = \dot{N}_W \cdot M_W = \frac{\beta_{\text{einseitig}} \cdot A}{\mathcal{R}T} (p_{s,W} - p_{W,L}) \cdot M_W$$

bestimmen, wenn man als Temperatur T die Mitteltemperatur zwischen Wasser und Luft wählt:

$$\vartheta = \frac{1}{2} (\vartheta_L + \vartheta_W) = 15^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad T = 288,15\text{ K}$$

Es gilt dann

$$\dot{m}_W = \frac{9,17 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20 \text{ m}^2}{8,3143 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} 288,15 \text{ K}} (0,023 - 0,01) \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,018 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} = 0,00179 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 1,79 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

Die Verdampfungsenthalpie Δh_V wird bei diesem Vorgang ebenfalls vom Wasser geliefert. Somit erhält man einen zweiten Wärmestrom

$$\dot{Q}_\beta = \dot{m}_W \cdot \Delta h_V = 1,79 \frac{\text{g}}{\text{s}} \cdot 2450 \frac{\text{J}}{\text{g}} = 4388,5 \text{ W} \quad ,$$

der von einer Heizung zugeführt werden muss, damit die Temperatur bei konstant $\vartheta_W = 20^\circ\text{C}$ gehalten werden kann.

Somit ergibt sich die insgesamt zuzuführende Heizleistung \dot{Q} als Summe aus der durch Wärmeübertragung abgeführten Leistung \dot{Q}_α und der zur Verdampfung nötigen Leistung des durch Stoffübertragung abgeführten Wasserdampfes \dot{Q}_β :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_\alpha + \dot{Q}_\beta = 2120 \text{ W} + 4388,5 \text{ W} = 6508 \text{ W} = 6,51 \text{ kW}$$