Seminargruppe WuSt

Aufgabe 4.1: *Wärmeübertragung durch Strahlung: Sichtfaktoren*

Ein Zylindermantel (Höhe H, Radius r_1) wird oben und unten von Kreisflächen (Radius r_1) verschlossen. Die untere Kreisfläche besteht aus 2 Teilflächen: $A_2 = 0,995\,m^2$ (Kreisringfläche mit Innenradius r_2 und Außenradius r_1) sowie $A_3 = 0,005\,m^2$ (Kreisfläche mit Radius r_2). Der Zylindermantel und die obere Kreisfläche bilden zusammen die Fläche $A_1 = 5\,m^2$.

Wie groß sind die Sichtfaktoren (Winkelverhältnisse) F_{11}, F_{12}, F_{13}; F_{21}, F_{22}, F_{23} und F_{31}, F_{32}, F_{33} ?

Lösung: *Wärmeübertragung durch Strahlung: Sichtfaktoren*

Zur Ermittlung von Sichtfaktoren sind folgende einfache Regeln zunächst anzuwenden:

1. Eine ebene oder konvexe Fläche bestrahlt sich nicht selbst:
$$F_{ii} \;=\; 0$$
2. Eine vollkommen umschlossene Fläche A_i bestrahlt die umschließende Fläche A_j vollständig:
$$F_{ij} \;=\; 1$$
3. Reziprozitätsbeziehung:
$$A_i\,F_{ij} \;=\; A_j\,F_{ji}$$
4. Summenbeziehung:
$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} \;=\; 1$$

In der vorliegenden Aufgabe sind die Flächen A_2 und A_3 eben und liegen in derselben Ebene. Sie können sich damit nicht selbst und auch nicht gegenseitig bestrahlen. Die Fläche A_1 umschließt diese beiden Flächen vollkommen. Anwendung der Summenbeziehung und Reziprozitätsbeziehung liefern folgende Sichtfaktoren:

$F_{11} = 0,8$; $F_{12} = 0,199$; $F_{13} = 0,001$
$F_{21} = 1$; $F_{22} = 0$; $F_{23} = 0$
$F_{31} = 1$; $F_{32} = 0$; $F_{33} = 0$

Führen diese einfachen Überlegungen und Regeln nicht zum Ziel, ist die geometrische Rechenvorschrift

$$F_{ij} \;=\; \frac{1}{\pi\,A_i}\int\limits_{A_j}\int\limits_{A_i}\frac{\cos\vartheta_i\;\cos\vartheta_j}{r^2}\;dA_i\;dA_j$$

anzuwenden.

Aufgabe 4.9: *Temperatur der Sonnenoberfläche*

Die (hemisphärische totale) Bestrahlungsstärke E, welcher die Erde aufgrund der solaren Einstrahlung im Mittel ausgesetzt ist, beträgt $E = 1367\,W/m^2$ (In der Literatur wird diese Größe häufig mit S bezeichnet). Dieser Wert kann beispielsweise von Satelliten ermittelt werden, die sich außerhalb der Erdatmosphäre befinden und somit die Sonnenstrahlen ohne Abschwächung messen können.

Der Abstand a Erde - Sonne beträgt im Mittel ca. $8\frac{1}{3}$ Lichtminuten (Lichtgeschwindigkeit $c = 300\,000\,km/s$). Der Radius der Sonne beträgt ca. $R_{Sonne} = 700\,000\,km$.

> Wie hoch ist, gemäß des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes, die Temperatur T auf der Sonnenoberfläche, wenn man die Sonne als *schwarzen Strahler* betrachtet?
>
> $(\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K^4})$

Lösung: *Temperatur der Sonnenoberfläche*

Zunächst gilt für den mittleren Abstand a zwischen Erde und Sonne:

$$a = 8\frac{1}{3}\,min \cdot \frac{60\,s}{min} \cdot 300\,000\frac{km}{s} = 1,5 \cdot 10^8\,km = 1,5 \cdot 10^{11}\,m$$

Die weitere Lösung erfolgt nach Aufgabe 4.4 der Hörsaalübung. Für den Wärmestrom von der Sonne S zur Erde E gilt:

$$\dot{Q}_{SE} = \Phi_{SE}$$

mit dem Strahlungsfluss

$$\Phi_{SE} = F_{SE}\,A_S\,\sigma\,T_S^4 \quad .$$

Der Sichtfaktor F_{SE} wurde in Aufgabe 4.4 zu

$$F_{SE} = \frac{R_S^2}{a^2}\,\frac{A_E}{A_S}$$

bestimmt.

Aus diesen Angaben folgt:

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{SE} &= \frac{R_S^2}{a^2}\,\frac{A_E}{A_S}\,A_S\,\sigma\,T_S^4 \\
E &= \frac{\dot{Q}_{SE}}{A_E} = \frac{R_S^2}{a^2}\,\sigma\,T_S^4 \\
\Rightarrow\quad T_S^4 &= \frac{E\,a^2}{\sigma\,R_S^2} = \frac{1367\,\frac{W}{m^2} \cdot (1,5 \cdot 10^{11}\,m)^2}{5,67 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K^4} \cdot (7 \cdot 10^8\,m)^2} \\
\Rightarrow\quad T_S &= 5769\,K
\end{aligned}$$

Mit diesem Abstand kann man nun die Fläche der Kugel berechnen, auf deren Oberfläche die Erdbahn verläuft:

$$A = 4\pi\, a^2 = 2,83 \cdot 10^{17}\, km^2 = 2,83 \cdot 10^{23}\, m^2$$

Da man die Bestrahlungsstärke der Sonne auf dieser Kugelfläche kennt, lässt sich nun die Gesamtstrahlungsleistung der Sonne berechnen:

$$P_{Sonne} = A \cdot E = 2,83 \cdot 10^{23}\, m^2 \cdot 1367\, W/m^2 = 3,87 \cdot 10^{26}\, W$$

Da der Abstand Erde-Sonne verglichen mit dem Erdradius sehr groß ist, fällt die Solarstrahlung praktisch nur aus einer Richtung ein. Daher kann man bei Strahlungsproblemen, welche mit der Ausstrahlung der Sonne zusammenhängen, gerichtete und hemisphärische Größen gleichsetzen:

$$E'_{Sonne} \;=\; E_{Sonne} \;=\; E$$

Dividiert man nun diesen Wert durch die Sonnenoberfläche

$$A_{Sonne} = 4\pi\, R^2_{Sonne} = 6,16 \cdot 10^{12}\, km^2 = 6,16 \cdot 10^{18}\, m^2$$

so erhält man folgende totale (gesamte) hemisphärische spezifische Ausstrahlung der Sonne:

$$M = M(T) = \frac{P_{Sonne}}{A_{Sonne}} = 6,28 \cdot 10^7\, \frac{W}{m^2} = 62,8\, \frac{MW}{m^2}$$

Mit Hilfe des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes findet man nun für die Temperatur:

$$T^4 = \frac{M(T)}{\sigma} = 1,11 \cdot 10^{15}\, K^4 \qquad \Rightarrow \qquad T = 5769\, K$$

Aufgabe 4.14: *Sichtfaktoren zweier konzentrischer Kugeln*

Zwei ineinander liegende Kugeln besitzen denselben Mittelpunkt. Die innenliegende Kugel 1 hat den Radius $r_1 = 5\,cm$ und die äußere Kugel 2 den Radius $r_2 = 10\,cm$.

a) Berechnen Sie die Sichtfaktoren F_{11}, F_{12}, F_{21} und F_{22}.

b) Welche Werte ergeben sich für die Sichtfaktoren zweier koaxial liegender Zylinder mit den Radien r_1 und r_2 und einer sehr großen Zylinderlänge, so dass der Einfluss der Stirnflächen vernachlässigt werden kann?

Lösung: *Sichtfaktoren zweier konzentrischer Kugeln*

a) Der Sichtfaktor der inneren Kugel 1 auf sich selbst ist null, da die Außenfläche einer Kugel konvex ist:

$$F_{11} = 0$$

Bei der äußeren Kugel wird die Innenfläche betrachtet. Da zwischen Kugel 1 und Kugel 2 ein Zwischenraum besteht, wird ein Teil der von der Oberfläche von Kugel 2 ausgesandten Strahlung auch direkt wieder auf die Oberfläche von Kugel 2 treffen. Daher ist sicher

$$F_{22} \neq 0$$

Es muss nun die Summenbeziehung für die Kugel 1 gelten.

$$F_{11} + F_{12} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad F_{12} = 1$$

Verwendet man nun die Reziprozitätsbeziehung so findet man

$$A_1 \cdot F_{12} = A_2 \cdot F_{21} \qquad \Rightarrow \qquad F_{21} = \frac{A_1}{A_2}\,F_{12} = \frac{4\pi\,r_1^2}{4\pi\,r_2^2}\,F_{12} = \frac{25}{100} \cdot 1 = 0,25$$

Da die Summenbeziehung auch für Kugel 2 gelten muss, folgt:

$$F_{21} + F_{22} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad F_{22} = 1 - F_{21} = 0,75$$

Die äußere Kugel strahlt demnach zu 75% auf sich selbst ein.

b) Der Sichtfaktor des inneren Zylinders 1 auf sich selbst ist erneut null:

$$F_{11} = 0$$

Mit der Summationsregel folgt für den Sichtfaktor des inneren auf den äußeren Zylinder F_{12}:

$$F_{11} + F_{12} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad F_{12} = 1$$

Wendet man nun erneut die Reziprozitätsbeziehung an, so erhält man für F_{21}:

$$A_1 \cdot F_{12} = A_2 \cdot F_{21} \qquad \Rightarrow \qquad F_{21} = \frac{A_1}{A_2} \cdot F_{12} = \frac{2\pi\,r_1\,L_{zyl}}{2\pi\,r_2\,L_{zyl}} \cdot F_{12} = \frac{5}{10} \cdot 1 = 0,5$$

Somit gilt hier für F_{22} mit Hilfe der Summationsregel:

$$F_{21} + F_{22} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad F_{22} = 1 - F_{21} = 0,5$$

Der äußere Zylinder strahlt zur Hälfte auf seine eigene Oberfläche ein.

Aufgabe 4.15: *Strahlungsschutz*

Zwischen zwei parallelen, unendlich ausgedehnten Oberflächen 1 und 3, die die Emissionsgrade $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0,75$ haben, wird eine dünne Zwischenwand angebracht. Die Temperaturen betragen $T_1 = 600\,K$ und $T_3 = 300\,K$.

Berechnen Sie den Wärmestrom je m^2 Wandfläche

a) ohne Zwischenwand,

b) mit einer Zwischenwand (Index 2) aus oxidiertem Stahlblech ($\epsilon_2 = 0,75$) und

c) mit einer Zwischenwand aus blank poliertem Kupferblech ($\epsilon_2 = 0,03$).

d) Wie hoch ist in Aufgabenteil b) bzw. c) jeweils die Temperatur T_2 des Strahlungsschutzschirmes?

Lösung: *Strahlungsschutz*

a) Für den Übergang von Fläche 1 zu 3 ohne Schirm gilt folgende Gleichung:

$$\frac{\dot{Q}_{13}}{A} = \frac{\sigma\,(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = 4\,133\,\frac{W}{m^2}$$

b) Der Wärmestrom kann folgendermaßen berechnet werden, wobei gilt: $n = 1$ (ein Schirm) und $\epsilon_Z = \epsilon_2 = 0,75$ (Emissionsgrad der Schirmoberflächen):

$$\dot{Q}_{13} = \frac{\sigma\,A\,(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1 + n\left(\frac{2}{\epsilon_Z} - 1\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{Q}_{13}}{A} = \frac{\sigma\,(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{4}{0{,}75} - 2} = 2067\,\frac{W}{m^2}$$

c) Dieser Aufgabenteil ist völlig analog zu Teil b), wobei lediglich der Emissionskoeffizient der Strahlenschutzwand ϵ_2 einen anderen Wert annimmt. Daher gilt:

$$\dot{Q}_{13} = \frac{\sigma\,A\,(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1 + \frac{2}{\epsilon_2} - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{Q}_{13}}{A} = \frac{\sigma\,(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{2}{0{,}75} + \frac{2}{0{,}03} - 2} = 102,3\,\frac{W}{m^2}$$

d) Man kann die Schirmtemperaturen berechnen, indem man den Wärmeübergang von Schirm 1 zu Schirm 2 betrachtet. Der Wärmestrom pro Fläche ist bekannt, daher kann man diese Gleichung nach T_2 auflösen:

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{12} &= \frac{\sigma\,A\,(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \\
\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4 &= \frac{\dot{Q}_{12}}{A}\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) \\
T_2^4 &= T_1^4 - \frac{\dot{Q}_{12}}{\sigma A}\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) \\
T_2 &= \left[T_1^4 - \frac{\dot{Q}_{12}}{\sigma A}\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)\right]^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Einsetzen der bereits berechneten Wärmeströme und der jeweiligen ϵ- Werte ergibt für Teil b) und c) jeweils dasselbe Ergebnis, nämlich $T_2 = 512,2\,K$.