Seminargruppe WuSt

Aufgabe 4.16: *Kabelkanal* (ehemalige Vordiplom-Aufgabe)

In einem horizontalen hohlen Kabelkanal der Länge L mit einem quadratischen Querschnitt der Seitenlänge a verläuft in Längsrichtung ein freigelegtes elektrisches Kabel der selben Länge mit einem Durchmesser D, das von einer elektrisch nicht leitenden Isolierschicht der Dicke δ ummantelt ist. Durch den im Kabel fließenden elektrischen Strom wird Wärme erzeugt und nach außen abgeführt. Im stationären Zustand steht das ummantelte Kabel im Wärmeaustausch durch Konvektion und Strahlung mit dem Kanal. Wärmeleitung durch die Luft und Wärmeübergang an den Stirnseiten des Kabels werden vernachlässigt. Die konstanten Temperaturen der Isoliermanteloberfläche T_0 und der Luft T_L sind bekannt.

Berechnen Sie unter diesen Umständen

a) den vom horizontalen Kabel an die umgebende Luft im Kanal durch freie Konvektion abgeführten Wärmestrom $\dot{Q}_K$,

b) die Temperatur ϑ_W der Kanalwände, wenn ein konstanter Wärmeübergangskoeffizient α_W zwischen den Kanalwänden und der Luft angenommen wird und die Lufttemperatur ϑ_L konstant bleibt,

c) den vom Kabel mit den Kanalwänden ausgetauschten Wärmestrom durch Strahlung $\dot{Q}_{Str}$ unter der Annahme, dass das Kabel von den Kanalwänden vollständig umschlossen ist (Vernachlässigen Sie die beiden Stirnflächen!),

d) die pro Volumeneinheit des elektrisch leitenden Kabels erzeugte mittlere Wärmeleistung (Joulesche Wärme) $\dot{q}'''_{diss}$ (Hinweis: $[\dot{q}'''_{diss}] = W/m^3$) sowie

e) die Temperatur ϑ_i an der Innenwand der Isolierschicht.

Angaben:

$D = 10\,mm$	$\delta = 5\,mm$	$a = 0,1\,m$	$L = 1,5\,m$	$\lambda_i = 0,4\,W/mK$
$\vartheta_0 = 130°C$	$\vartheta_L = 30°C$	$\alpha_W = 20\,W/m^2\,K$	$\epsilon_0 = 0,8$	$\epsilon_W = 0,2$

Mit der Wärmeleitfähigkeit λ_i und dem Emissionsgrad ϵ_0 der Isolierschicht sowie dem Emissionsgrad ϵ_W der Kanalwand. Die Erdbeschleunigung beträgt: $g = 9,81\,m/s^2$.

Stoffwerte des idealen Gases Luft:

Wärmeleitfähigkeit	kinemat. Viskosität	Prandtlzahl	therm. Ausdehungskoeff.
$\lambda_L = 0,0299\frac{W}{mK}$	$\nu_L = 2,094 \cdot 10^{-5}\frac{m^2}{s}$	$Pr_L = 0,708$	??? *ideales Gas* !!!

Lösung: *Kabelkanal* (ehemalige Vordiplom-Aufgabe)

a) Freie Konvektion am horizontalen Zylinder

$$Nu \,=\, \left\{0,60 + 0,387\,\sqrt[6]{Ra\, f_3}\right\}^2 \qquad \text{mit} \qquad f_3 = \left\{1 + \left(\frac{0,559}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right\}^{-\frac{16}{9}}$$

Die Rayleighzahl berechnet sich als Produkt von Grashof- und Prandtl-Zahl:

$$Ra \,=\, Gr \cdot Pr$$

Die Grashof-Zahl der Luft ergibt sich zu:

$$Gr_L \,=\, \beta\,\frac{g\, l^3}{\nu^2}\,|T_0 - T_L| \,=\, \frac{|T_0 - T_L|}{T_L} \cdot \frac{g\,(D + 2\,\delta)^3}{\nu^2} \,=\, 59\,040$$

wobei die charakteristische Länge der Außendurchmesser der Kabelisolierung ist und sich der isobare Volumenausdehnungskoeffizient β im vorliegenden Fall des idealen Gases zu

$$\beta \,=\, \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \,=\, \frac{1}{v}\left(\frac{\partial \frac{RT}{p}}{\partial T}\right)_p \,=\, \frac{1}{v}\frac{R}{p} \cdot \frac{T}{T} \,=\, \frac{1}{T}$$

ergibt. Die Rayleigh-Zahl Ra und die Funktion f_3 lauten nun:

$$Ra \,=\, Gr \cdot Pr \,=\, 41\,800 \qquad \text{und} \qquad f_3 = \left\{1 + \left(\frac{0,559}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right\}^{-\frac{16}{9}} \,=\, 0,327$$

Es folgt schließlich die Nußelt-Zahl

$$Nu \,=\, \left\{0,60 + 0,387\,\sqrt[6]{13\,668,6}\right\}^2 \,=\, 6,212$$

Der Wärmeübergangskoeffizient ergibt sich zu

$$\alpha \,=\, \frac{Nu \cdot \lambda_L}{(D + 2\,\delta)} \,=\, 9,29\,\frac{W}{m^2\,K}$$

Der konvektiv von der Isolierung abgegebene Wärmestrom $\dot{Q}_K$ beträgt

$$\dot{Q}_K \,=\, \alpha\, A_{zyl}\,(T_0 - T_L) \,=\, 9,29\,\frac{W}{m^2\,K} \cdot \pi\, L\,(D + 2\,\delta) \cdot 100\,K \,=\, 87,56\,W$$

b) Damit im stationären Fall die Lufttemperatur T_L konstant bleibt, muss der konvektive Wärmestrom $Luft \,\rightarrow\, Kanalwand$ genauso groß sein wie der Wärmestrom $Kabel \,\rightarrow\, Luft$.

$$\dot{Q}_K \,=\, \alpha_W\, A_{kanal}\,(T_L - T_W) \,=\, 20\,\frac{W}{m^2\,K} \cdot 4\,a\,L \cdot (T_L - T_W) \qquad \Rightarrow$$

$$T_W \,=\, T_L - \frac{\dot{Q}_K}{4\,a\,L \cdot \alpha_W} \,=\, 295,85\,K \quad \Rightarrow \quad \vartheta_W = 22,7\,°C$$

c) Der Wärmestrom infolge des Strahlungsaustausches zwischen Kanalwand und Kabel, unter Vernachlässigung der Stirnflächen, berechnet sich zu

$$\dot{Q}_{Str} \;=\; \frac{\sigma\, A_0\; (T_0^4 - T_W^4)}{\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{A_0}{A_W}\left(\frac{1}{\epsilon_W} - 1\right)}$$

Einsetzen der Werte ergibt mit

$$A_0 \;=\; \pi\,(D + 2\delta)\,L \;=\; 0,09425\,m^2 \qquad \text{bzw.} \qquad A_W \;=\; 4\,a\,L \;=\; 0,6\,m^2$$

folgenden Wärmestrom

$$\dot{Q}_{Str} \;=\; \frac{5,670 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K^4} \cdot 0,09425\,m^2 \cdot (403,15^4 - 295,85^4)\;K^4}{\frac{1}{0,8} + \frac{0,09425\,m^2}{0,6\,m^2}\left(\frac{1}{0,2} - 1\right)} \;=\; 53,36\,W$$

d) Die spezifische Wärmeleistung des Kabels ist nun die auf das Volumen bezogene insgesamt abgeführte Leistung $\dot{Q}_{ab}$, die sich als Summe aus Strahlungsleistung und konvektiv abgegebener Wärmeleistung ergibt:

$$\dot{Q}_{ab} \;=\; \dot{Q}_K + \dot{Q}_{Str} \;=\; 53,36\,W + 87,56\,W \;=\; 140,92\,W$$

Es ergibt sich somit:

$$\dot{q}'''_{diss} \;=\; \frac{\dot{Q}_{ab}}{V_{Kabel}} \;=\; \frac{4\,\dot{Q}_{ab}}{\pi\,D^2\,L} \;=\; \frac{4 \cdot 140,92\,W}{4,712 \cdot 10^{-4}\,m^3} \;=\; 1,196\,\frac{MW}{m^3}$$

e) Die Temperatur an der Isolierschichtinnenseite T_i kann man mit Hilfe der Wärmeleitfähigkeit λ_i und der Beziehung für den Gesamtwiderstand eines Hohlzylinders berechnen:

$$\dot{Q}_{Leitung} \;=\; \frac{1}{R_{zyl}}\;(T_i - T_0) \;=\; \frac{2\pi\,\lambda_i\,L}{\ln\left(\frac{D+2\delta}{D}\right)}\;(T_i - T_0)$$

Die insgesamt abgegebene Wärme $\dot{Q}_{ab}$ muss zuvor in Form von Wärmeleitung durch die Isolationsschicht transportiert werden. Daher gilt:

$$\dot{Q}_{Leitung} \;=\; \dot{Q}_{ab}$$

Es ergibt sich somit für die Temperatur an der Innenseite der Isolierschicht:

$$T_i \;=\; T_0 + \frac{\dot{Q}_{ab}}{2\pi\,\lambda_i\,L}\;\ln\left(\frac{D + 2\delta}{D}\right)$$

$$T_i \;=\; 403,15\,K + \frac{140,92\,W}{2\pi \cdot 0,4\,\frac{W}{m\,K} \cdot 1,5\,m}\;\ln\left(\frac{0,02}{0,01}\right) \;=\; 429,1\,K \quad \Rightarrow \quad \vartheta_i = 155,91\,°C$$

Aufgabe 4.13: *Thermometer im Raum*

Ein Thermometer befindet sich in der Mitte eines Raumes. Die Temperatur der Raumwände beträgt $\vartheta_W = 15\,°C$ und die Temperatur der umgebenden Luft $\vartheta_L = 25\,°C$. Der Glaskolben mit der Thermometerflüssigkeit hat die Oberfläche $A_1 = 2\,cm^2$. Der Emissionsgrad beträgt $\epsilon_1 = 0,9$ und der Wärmeübergangskoeffizient Glaskolbenoberfläche / Umgebungsluft beträgt $\alpha = 10\,\frac{W}{m^2\,K}$.

a) Veranschaulichen Sie sich die Richtung der im stationären Fall am Thermometer auftretenden Wärmeströme.

b) Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung des Strahlungswärmestroms von dem Thermometer zur Wand $\dot{Q}_{T\rightarrow W}$ an. Vergegenwärtigen Sie sich hierzu zunächst die Besonderheit der vorliegenden Geometrie.

c) Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung des konvektiven Wärmestroms von der Umgebungsluft zum Thermometer $\dot{Q}_{L\rightarrow T}$ an.

d) Welche Temperatur liest man am Thermometer im stationären Zustand ab?

e) Überprüfen Sie das unter c) gefundene Ergebnis.

Hinweis:

Verwenden Sie zur Auswertung des Strahlungsterms in c) folgende Beziehung

$$T_T^4 - T_W^4 \;=\; (T_T - T_W)\,(T_T + T_W)\,\left(T_T^2 + T_W^2\right)$$

bzw.

$$T_T^4 - T_W^4 \;\approx\; (T_T - T_W)\,\underbrace{\left(\tilde{T}_T + T_W\right)\left(\tilde{T}_T^2 + T_W^2\right)}_{=:\,f(\tilde{T}_T,\,T_W)\,=\,konst.}$$

mit einer geeigneten konstanten Schätztemperatur $\tilde{T}_T = konstant$ für T_T.

Lösung: *Thermometer im Raum*

a) Für die Temperatur des Thermometers T_T gilt sicher

$$T_W \;\leq\; T_T \;\leq\; T_L$$

Das heißt: Der konvektive Wärmestrom geht von der wärmeren Luft an das kältere Thermometer, während der Strahlungswärmestrom von dem Thermometer an die noch kältere Wand übergeht. Berücksichtigt man dies, so sind alle unten aufgeführten Wärmeströme positiv.

b) Bei der Geometrie handelt es sich um einen kleinen Körper 1, der von einem Körper 2, dem Wohnraum, umgeben ist, der eine wesentlich größere Oberfläche aufweist als der Glaskolben des Thermometers: $A_2 >> A_1$. Die Gleichung, welche den Wärmestrom in diesem Fall beschreibt, lautet

$$\dot{Q}_{T\rightarrow W} \;=\; \sigma\,\epsilon_1\,A_1\,\left(T_T^4 - T_W^4\right)$$

c) Der konvektive Wärmestrom von der Umgebungsluft zum Thermometer berechnet sich zu:

$$\dot{Q}_{L\to T} \;=\; \alpha\, A_1\; (T_L - T_T)$$

d) Im Gleichgewichtszustand muss der dem Thermometer zufließende Wärmestrom gleich dem abfließenden Wärmestrom sein:

$$\dot{Q}_{T\to W} \;=\; \dot{Q}_{L\to T}$$

Es muss also gelten

$$\sigma\, \epsilon_1\, A_1\; \left(T_T^4 - T_W^4\right) \;=\; \alpha\, A_1\; (T_L - T_T)$$

Da diese Gleichung nicht ohne weiteres aufgelöst werden kann, wird der Strahlungsterm zunächst umgeformt:

$$\sigma\, \epsilon_1\, A_1\; (T_T - T_W)\; \underbrace{\left(\tilde{T}_T + T_W\right)\; \left(\tilde{T}_T^2 + T_W^2\right)}_{=:\, f(\tilde{T}_T,\, T_W) \,=\, konst.} \;=\; \alpha\, A_1\; (T_L - T_T)$$

Da sich die interessierenden Temperaturen lediglich im Bereich $288,15\,K \;\leq\; T \;\leq\; 298,15\,K$ bewegen, sind die Summenterme der Temperaturen bzw. deren Quadrate „numerisch hinreichend stabil" während die Differenz zweier nahe beeinander liegender Temperaturen numerisch schwieriger zu verarbeiten ist. Daher kann der „träge" Summenterm $f(\tilde{T}_T,\, T_w)$ ohne großen Fehler als konstant angenommen werden, während die Differenz der Temperaturen variabel belassen wird. Für die Thermometertemperatur $\tilde{\vartheta}_T$ wird zunächst das arithmetische Mittel von Wand- und Lufttemperatur eingesetzt:

$$\tilde{\vartheta}_T \;=\; \frac{1}{2}\, (\vartheta_W + \vartheta_L) \;=\; 20\,^{\circ}C \quad\Rightarrow\quad \tilde{T}_T = 293,15\,K \qquad\Rightarrow$$

$$f(\tilde{T}_T,\, T_W) \;=\; f(293,15\,K,\; 288,15\,K) \;=\; 9,822 \cdot 10^7\,K^3$$

Es gilt somit:

$$T_T \;=\; \frac{\alpha\, A_1\, T_L + \sigma\, \epsilon_1\, A_1\; \left(\tilde{T}_T + T_W\right)\; \left(\tilde{T}_T^2 + T_W^2\right)\; T_W}{\sigma\, \epsilon_1\, A_1\; \left(\tilde{T}_T + T_W\right)\; \left(\tilde{T}_T^2 + T_W^2\right) + \alpha\, A_1}$$

Es folgt daher:

$$T_T \;=\; \frac{0,5963\,W + 1,0206 \cdot 10^{-11}\,W/K^4 \cdot 9,822 \cdot 10^7\,K^3 \cdot 288,15\,K}{1,0206 \cdot 10^{-11}\,W/K^4 \cdot 9,822 \cdot 10^7\,K^3 + 0,002\,W/K} \;=\; \frac{0,88515}{0,0030024}$$

also

$$T_T \;=\; 294,8\,K \quad\Rightarrow\quad \vartheta_T = 21,65\,^{\circ}C$$

Es ist erstaunlich, wie wenig sich T_T ändert wenn man für $\tilde{T}_T$ die theoretischen Extremalwerte $\tilde{T}_T \;=\; 288,15\,K$ und $\tilde{T}_T \;=\; 298,15\,K$ einsetzt:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_T \;=\; 288,15\,K: &\qquad f(\tilde{T}_T,\, T_W) \;=\; 9,57 \cdot 10^7\,K^3 &&\Rightarrow\quad T_T \;=\; 294,87\,K\\
& &&\Rightarrow\quad \vartheta_T \;=\; 21,72\,^{\circ}C\\
\tilde{T}_T \;=\; 298,15\,K: &\qquad f(\tilde{T}_T,\, T_W) \;=\; 10,60 \cdot 10^7\,K^3 &&\Rightarrow\quad T_T \;=\; 294,64\,K\\
& &&\Rightarrow\quad \vartheta_T \;=\; 21,49\,^{\circ}C
\end{aligned}$$

e) Man kann das unter c) gewonnene Ergebnis überprüfen, indem man mit der errechneten Thermometertemperatur T_T die beiden Wärmeströme $\dot{Q}_{T\to W}$ und $\dot{Q}_{L\to T}$ bestimmt. Es gilt zunächst für den infolge von Strahlung hervorgerufenen Wärmestrom $\dot{Q}_{T\to W}$:

$$\dot{Q}_{T\to W} \;=\; \sigma\,\epsilon_1\,A_1\,\left(T_T^4 - T_W^4\right)$$

Also

$$\dot{Q}_{T\to W} \;=\; 5,670\cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K}\cdot 0,0002\,m^2\,(294,8^4 - 288,15^4)K^4 \;=\; 6,7\cdot 10^{-3}\,W$$

Für den konvektiven Wärmestrom $\dot{Q}_{L\to T}$ gilt:

$$\dot{Q}_{L\to T} \;=\; \alpha\,A_1\,(T_L - T_T)$$

Also

$$\dot{Q}_{L\to T} \;=\; 10\,\frac{W}{m^2\,K}\cdot 0,0002\,m^2\cdot(298,15\,K - 294,8\,K)\,K \;=\; 6,7\cdot 10^{-3}\,W$$

Die berechnete Thermometertemperatur ist demnach richtig!

Aufgabe 4.11: *Das spektrale Maximum der Solarstrahlung*

Bei welcher Wellenlänge λ_{max} weist das solare Spektrum sein Maximum auf, wenn man die Sonne als schwarzen Strahler betrachtet, dessen Oberflächentemperatur $T_S = 5700\,K$ beträgt?

Lösung: *Das spektrale Maximum der Solarstrahlung*

Das Maximum der spektralen Intensität kann man mit Hilfe des Wienschen Verschiebungsgesetzes für den schwarzen Körper bestimmen:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2897,756 \cdot 10^{-6}\,m\,K$$

Setzt man hier die Oberflächentemperatur $T_S = 5700\,K$ ein, so findet man:

$$\lambda_{max} = \frac{2897,756 \cdot 10^{-6}\,m\,K}{5700\,K} = 5,084 \cdot 10^{-7}\,m = 508,4\,nm$$

Man würde diese Wellenlänge auch ermitteln, wenn man das spektrale Maximum der Empfindlichkeit des menschlichen Auges sucht.