

Aufgabe 1.5: *Forschungsteich*

Das Wasser in einem Naturteich mit halbkugelförmigem Profil (Radius $r_W = 2,5\text{ m}$) soll für biologische Untersuchungen auf konstanter Temperatur gehalten werden. Gesucht ist die Heizleistung für eine konstante Wassertemperatur von $\vartheta_W = 25^\circ\text{C}$.

- a) Auf einer gedachten Halbkugeloberfläche in 2 m Abstand vom Teichboden hat das Erdreich (Wärmeleitfähigkeit $\lambda_E = 0,59 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$) die konstante Temperatur $\vartheta_E = 10^\circ\text{C}$. Wie groß ist der Wärmestrom, der vom Teichboden mit $\vartheta_W = 25^\circ\text{C}$ durch die gedachte Erdreichhalbkugel fließt?

Hinweis: Wärmeleitwiderstand einer Kugelschale

$$R_{\lambda, \text{Kugelschale}} = \frac{\frac{1}{r_W} - \frac{1}{r_E}}{4 \pi \lambda_E}$$

- b) Der Teich ist mit einer Kunststoffplane abgedeckt, um die Verdunstung des Wassers zu verhindern. Wie groß ist der Wärmestrom, der an windstillen Tagen durch freie Konvektion mit $\alpha = 3,74 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ konvektiv von der Planenoberfläche ($\vartheta_P = \vartheta_W = 25^\circ\text{C}$) an die Luft mit $\vartheta_L = 5^\circ\text{C}$ abgegeben wird?
- c) Welcher Wärmestrom wird durch Strahlung zwischen der Planenoberfläche (Emissionsgrad $\varepsilon_P = 0,93$) und der Umgebung (schwarzer Strahler, $\vartheta_U = \vartheta_L = 5^\circ\text{C}$) ausgetauscht?
- d) Wie groß ist die erforderliche Heizleistung für eine konstante Wassertemperatur von $\vartheta_W = 25^\circ\text{C}$?

Lösung: *Forschungsteich*

- a)

$$R_{\lambda, \text{Halbkugelschale}} = 2 R_{\lambda, \text{Kugelschale}}$$

Parallelschaltung oder Hinweis: durch Halbkugelschale fließt $\frac{1}{2} \dot{Q}_{\text{Kugelschale}}$.

$$\Rightarrow R_{\lambda, \text{Halbkugelschale}} = 2 \frac{\frac{1}{r_W} - \frac{1}{r_E}}{4 \pi \lambda_E} = \frac{\frac{1}{2,5\text{m}} - \frac{1}{4,5\text{m}}}{2 \pi \cdot 0,59 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} = 0,048 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$\dot{Q}_{W \rightarrow E} = \frac{\vartheta_W - \vartheta_E}{R_{\lambda, \text{Halbkugelschale}}} = \frac{25^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}}{0,048 \frac{\text{K}}{\text{W}}} = 313\text{ W}$$

- b)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{P \rightarrow L}^{\text{konvektiv}} &= A \alpha (\vartheta_P - \vartheta_L) \\ \Rightarrow \dot{Q}_{P \rightarrow L}^{\text{konvektiv}} &= \pi r_W^2 \alpha (\vartheta_P - \vartheta_L) = 1470\text{ W} \end{aligned}$$

- c) Die Planenoberfläche wird von der Umgebung eingeschlossen.

$$\dot{Q}_{P \rightarrow L}^{\text{Strahlung}} = \varepsilon_P \sigma A_P (T_P^4 - T_L^4) = 1984\text{ W} \quad \text{mit } \varepsilon_U = 1$$

- d) Energiebilanz für das Wasser im Teich liefert:

$$\dot{Q}_{\text{Heizleistung}} = \dot{Q}_{W \rightarrow E} + \dot{Q}_{P \rightarrow L}^{\text{konvektiv}} + \dot{Q}_{P \rightarrow L}^{\text{Strahlung}} = 3,767\text{ kW.}$$

Aufgabe 1.6: *Wärmeleitung durch eine Gebäudewand*

Eine Gebäudewand mit der Gesamtfläche $A_w = 200 \text{ m}^2$ besteht aus folgenden Schichten:

- Innenputz mit $\delta_i = 0,5 \text{ cm}$
- Beton mit $\delta_B = 23,0 \text{ cm}$
- Außenputz mit $\delta_a = 2,0 \text{ cm}$

Die Temperatur im Inneren des Raumes beträgt $\vartheta_i = 22^\circ\text{C}$, während sie außen -7°C beträgt.

- a) Wie groß sind die Wärmeleitwiderstände der einzelnen Schichten sowie der Widerstand R_λ der drei Wandschichten zusammen?
- b) Wie groß ist der Wärmedurchgangskoeffizient k_0 der Wand?
- c) Welche Wärmestromdichte \dot{q}_0 liegt in der Wand vor, und welcher Wärmestrom \dot{Q}_0 fließt durch die Wand?

Zur Wärmedämmung soll eine Isolationsschicht an der Wand angebracht werden. Dies kann auf der Außen- oder auf der Innenseite der Gebäudewand geschehen.

- d) Berechnen Sie für beide Fälle die Wärmedurchgangskoeffizienten k_i und k_a . Wie groß sind jeweils Wärmestromdichte \dot{q} und Wärmestrom \dot{Q} ?
- e) Berechnen Sie für alle drei Möglichkeiten des Wandaufbaus die Temperatur an der Schichtgrenze Innenputz/Beton!
- f) Welche Isolationsmöglichkeit würden Sie vorziehen?
Hinweis: Wasserdampf aus dem Inneren des Gebäudes kann bis zur Grenze Innenputz/Beton vordringen und soll dort möglichst nicht kondensieren.

Die zur Berechnung notwendigen Größen sind in der nachstehenden Tabelle aufgeführt:

Wärmeleitfähigkeiten und Dicken:			
Innenputz:	Außenputz:	Beton:	Isolation:
$\delta_i = 0,5 \text{ cm}$	$\delta_a = 2,0 \text{ cm}$	$\delta_B = 23,0 \text{ cm}$	$\delta_{Iso} = 8,0 \text{ cm}$
$\lambda_i = 0,7 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$	$\lambda_a = 0,9 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$	$\lambda_B = 1,3 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$	$\lambda_{Iso} = 0,07 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
Wärmeübergangskoeff.:		Lufttemperaturen:	
innen:	außen:	innen:	außen:
$\alpha_i = 9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$	$\alpha_a = 12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$	$\vartheta_i = 22^\circ\text{C}$	$\vartheta_a = -7^\circ\text{C}$
Gesamtfläche der Wand: $A_w = 200 \text{ m}^2$			

Lösung: Wärmeleitung durch eine Gebäudewand

- a) Die Wärmeleitwiderstände der ebenen Wand berechnen sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}R_{\lambda,i} &= \frac{\delta_i}{A_W \lambda_i} = 3,571 \cdot 10^{-5} \frac{K}{W} \\R_{\lambda,B} &= \frac{\delta_B}{A_W \lambda_B} = 8,846 \cdot 10^{-4} \frac{K}{W} \\R_{\lambda,a} &= \frac{\delta_a}{A_W \lambda_a} = 1,111 \cdot 10^{-4} \frac{K}{W}\end{aligned}$$

Da die einzelnen Schichten „in Reihe“ geschaltet sind, ergibt sich der Gesamtwiderstand der Wand durch Summation der Bauteilwiderstände:

$$R_\lambda = \sum_n R_{\lambda,n} = \sum_n \frac{\delta_n}{A_W \lambda_n} = 1,031 \cdot 10^{-3} \frac{K}{W}$$

- b) Für den k -Wert der Wand ohne Isolation gilt:

$$k_o = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_a} + \sum_n \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_i}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_a} + A_W R_\lambda + \frac{1}{\alpha_i}} = 2,496 \frac{W}{m^2 K}$$

- c) Für die Wärmestromdichte \dot{q}_0 und den Wärmestrom \dot{Q}_0 durch die nicht isolierte Wand gilt

$$\dot{q}_0 = k \Delta T = 72,4 \frac{W}{m^2} \quad \text{und} \quad \dot{Q}_0 = k A \Delta T = 2,496 \frac{W}{m^2 K} \cdot 200 m^2 \cdot 29 K = 14,477 kW$$

- d) Die k -Werte der Wand mit Isolation k_i (Isolation innen) und k_a (Isolation außen) berechnen sich aus:

$$k_i = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \sum_n \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_i} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{\delta_{Iso}}{\lambda_{Iso}} + \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{\delta_B}{\lambda_B} + \frac{\delta_a}{\lambda_a} + \frac{1}{\alpha_i} \right)^{-1} = k_a = 0,6478 \frac{W}{m^2 K}$$

Man sieht, dass es für die Wärmedurchgangskoeffizienten unerheblich ist, auf welcher Seite die Isolierung angebracht wird.

Die Wärmestromdichte \dot{q} und der Wärmestrom \dot{Q} berechnen sich gemäß

$$\dot{q} = k \Delta T = 18,78 \frac{W}{m^2} \quad \text{und} \quad \dot{Q} = A \dot{q} = 3,757 kW$$

- e) Da der Wärmestrom an jeder Stelle der Wand gleich groß sein muss, gilt $\dot{q} = const.$. Somit folgt für die Temperatur $\vartheta_{i,B}$ an der Grenzfläche Innenputz/Beton bei der Wand ohne Isolationsschicht:

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= (\vartheta_i - \vartheta_{i,B}) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right)^{-1} \\ \vartheta_{i,B} &= \vartheta_i - \dot{q}_0 \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right) = 13,44^\circ C\end{aligned}$$

Mit Hilfe des unter d) berechneten Wärmestroms findet man bei einer außen angebrachten Isolation auf analogem Weg

$$\vartheta_{i,B} = \vartheta_i - \dot{q} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right) = 19,78^\circ C$$

Ist die Isolation jedoch innen angebracht, so muss ihr thermischer Widerstand mit berücksichtigt werden, wenn die Temperatur der Grenzfläche Innenputz/Beton berechnet werden soll:

$$\vartheta_{i,B} = \vartheta_i - \dot{q} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{\delta_{Iso}}{\lambda_{Iso}} \right) = -1,68^\circ C$$

- f) Um die Bildung von Schimmel an den Wänden zu verhindern, ist es wichtig, die Temperatur an der Grenzfläche Innenputz/Beton möglichst hoch zu halten und auf diese Weise die Bildung von Kondenswasser möglichst zu verhindern. Deshalb ist für ständig beheizte Gebäude die Außenisolierung vorzuziehen.